Matematika ÉP2
Elsőrendű differenciálegyenletek, 3. gyakorlat
2014/15. őszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Mik is azok a differenciálegyenletek?

A mindennapi életben lejátszódó mozgásokat, folyamatokat és jelenségeket függvényekkel lehet leírni. Olyan egyenleteket írhatunk fel, amelyekben a folyamatot leíró függvény és annak valahanyad rendű deriváltjai szerepelnek. Az ilyen függvényegyenleteket differenciálegyenleteknek nevezzük és célunk a megoldásfüggvény megtalálása. Az egyenletben szereplő legmagasabb derivált rendjét a differenciálegyenlet *rend*jének hívjuk. A differenciálegyenlet *általános megoldás*a nem más, mint az összes megoldást tartalmazó halmaz. Általában ezt az általános megoldást keressük. Ugyanakkor vannak feladatok, melyekben egy további, úgynevezett kezdeti feltételt kielégítő, *partikuláris megoldás*t keresünk. Egy differenciálegyenletet a hozzá tartozó kezdeti feltételekkel együtt *Cauchy-feladatnak vagy kezdetiérték-problémának* nevezünk.

A differenciálegyenletekkel kapcsolatosan felmerülő kérdéseink egyike, hogy milyen feltételekkel létezik egyáltalán megoldás, és ha ezt már tisztáztuk, akkor mikor mondhatjuk, hogy ez a megoldás egyértelmű. Mivel a differenciálegyenletek csak közelítik a valóságot, de sosem írják le pontosan, így nem hivatkozhatunk arra, hogy a megoldás azért létezik és egyértelmű, mert konkrét jelentéssel bír a gyakorlatban. Ugyanakkor pontos matematikai tételek léteznek azzal kapcsolatban, hogy mely feltételek teljesülése esetén lesz a Cauchy feladatnak egyértelmű megoldása. A továbbiakban feltesszük, hogy a függvényeink kellően "szépek", és a megoldás létezését nem vitatjuk.

Elsőrendű szétválasztható változójú (szeparálható) differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet elsőrendű szétválasztható változójú egyenletnek hívunk, ha felírható a következő alakban:

$$y' = f(x)g(y)$$

A megoldás menete: Először megkeressük azokat az azonosan konstans y függvényeket, melyekre $g(y) = 0$. Ezek megoldások. A következő lépésben felírjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y),$$

majd pedig szeparáljuk az x-et és y-t tartalmazó függvényeket az egyenlet két különböző oldalára. Ezt követően integrálunk, azaz felírjuk, hogy

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Ha mindkét oldal integrálható, akkor x és y között kapunk egy összefüggést, amelyből jó esetben kifejezhető y. (Amennyiben Cauchy-feladatot kell megoldani, úgy a partikuláris megoldás meghatározására ezen lépés után van lehetőség.)

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek hívunk, ha felírható a következő alakban:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Ha a fenti egyenlet jobb oldalán $q(x) \equiv 0$, akkor homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletünk van. Ez pontosan a következő alakot jelenti: $y' + p(x)y = 0$.

Megoldás menete: Az inhomogén egyenlet megoldása két részből áll. Előbb megkeressük homogén egyenlet általános megoldását, majd ezt követi az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése az állandók variálásának módszerével. Azaz

$$y_{\text{IH, Á}} = y_{\text{H, Á}} + y_{\text{IH, P}}.$$

A homogén egyenlet megoldása mindig egy szeparálható differenciálegyenlet, aminek persze az $y \equiv 0$ megoldása, így keressük a többit. Előbb tehát szeparáljuk a változókat, majd integrálunk, végül kifejezzük y-t és azt kapjuk, hogy

$$y_{\text{H, Á}} = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.
Ezt követően az eredeti inhomogén egyenlet egy partikuláris (nem általános) megoldását a következő alakban keressük: $y_{\text{IH, Á}} = C(x)y_{\text{H, Á}}$, ahol a $C(x)$ valós függvényt úgy számoljuk ki, hogy az $y_{\text{IH, Á}}$-t visszahelyettesítjük az eredeti inhomogén egyenletbe. Ezek után kapjuk, hogy

$$y_{\text{IH, P}} = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

(Amennyiben itt is Cauchy-feladatot kell megoldani, úgy a végső megoldás meghatározására ezen lépés után van lehetőség.)

2. Feladatok

1. Határozza meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a) $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$ (b) $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$

   (c) $\sqrt{1 - y^2} = y'\sqrt{1 + x^2}$ (d) $\left(x + xy^2\right) y' = 3$

   (e) $\sqrt{1 - y^2} = y'(1 - x^2)$ (f) $(4 - x^2)e^{2y} \cdot y \cdot y' = x - 1$

   (g) $\left(x + xy^2\right) y' = 3$ (h) $\left(x^2 - 1\right) \left(y^2 + 1\right)^{-2} \cdot y \cdot y' = 1$

   (i) $yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$ (j) $\sqrt{25 - x^2} \cos^2 y \cdot y' = 1$

2. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (szétválasztható változójú egyenletek)!

   (a) $y \cdot y' = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad y(1) = 1$ (b) $(x + 1)y' = y - 2, \quad y(-3) = 1$

   (c) $\left(x^2 - 1\right) y' = xy, \quad y(\sqrt{2}) = -1$ (d) $y \ln y \mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0, \quad y(1) = 1$

3. Keresse meg a $2y'(x+4)+y=0$ differenciálegyenletnek azt a megoldásgörbéjét, amely alatti terület 20 területegység a $0 \leq x \leq 12$ intervallumban!

4. Szórjunk m tömegű anyagot oldószerbe. Az oldódás sebessége a még fel nem oldódott anyag mennyiségével arányos, azaz az oldódást leíró differenciálegyenlet $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(m-x)$, ahol x jelöli a t idő alatt feloldódott anyag mennyiségét, k arányossági tényező. Ha 1 perc alatt az anyag 20%-a oldódik fel, akkor 3 perc alatt hány százaléka? (Azaz $x(0)=0$, $x(1)=0,2m$ $x(3)=?$)

5. Az $y' = 3(x-1)^2 y$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 2 helyen, ha $y(1) = 1$?

6. Mennyi lesz az y függvény értéke az $x=0$ pontban, ha tudjuk, hogy y kielégíti a $y' = \frac{\cos^2 y}{1+x^2}$ differenciálegyenletet és $y(1)=0$?

7. Az $y' = (x-1)^2 \cos^2 y$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 2 helyen, ha $y(1)=0$?

8. Az $y' = \left(y^2+1\right) e^{-2x}$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 1 helyen, ha $y(0)=0$?

9. Határozza meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a) $y' + xy - x = 0$

   (b) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$

   (c)$y' = xy + x^3$

   (d) $y' + ythx = 6e^{2x}$

   (e)$\left(x^2+4\right) y' - 2xy = \left(x^2+4\right)^2 \cos x$

   (f) $\cos x \cdot y' = \sin x \cdot y + \cos^2 x$

   (g) $y' + 3tgx \cdot y = x \cos^4 x$

10. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (elsőrendű lineáris egyenletek)!

   (a) $y' \cos x + y \sin x = 1, \quad y(0) = 1$

   (b) $xy' - 2y = x^3 e^x, \quad y(1) = 2$

   (c) $xy' + 2y = x^4, \quad y(1) = -2$

   (d) $y' + x^2 y = x^2, \quad y(2) = 1$

   (e) $y' + y \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad y(0) = 3$