Matematika ÉP2
Másodrendű differenciálegyenletek, 4. gyakorlat
2014/15. őszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenletek

Az állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenlet általános alakja a következő:

$$py'' + qy' + ry = f(x),$$

ahol $p, q, r \in \mathbb{R}$. Amennyiben a fenti egyenletben $f(x) \equiv 0$, akkor homogén állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenletünk van.

A megoldás menete: Az egyenlet megoldása két részből áll. Előbb megkeressük a homogén egyenlet általános megoldását, majd ezt követi az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése próbefüggvény módszerrel. Azaz

$$y_{\text{IH, Á}} = y_{\text{H, Á}} + y_{\text{IH, P}}.$$

Homogén állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenlet megoldása

A homogén egyenlet megoldásait $y = e^{\lambda x}$ alakban keressük. Ha elvégezzük ezt a behelyettesítést, akkor felírhatjuk a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét, ami a következő:

$$p\lambda^2 + q\lambda + r = 0.$$

Ennek megoldásai a D diszkrimináns függvényében a következőek lehetnek:

1. $D > 0$, azaz az egyenletnek két különböző valós gyöke van λ_1 és λ_2. Ekkor

   $$y_{\text{H, Á}} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

   Megjegyzés: Két negatív gyök esetén megfigyelhető, hogy x növekedésével a megoldás exponenciális gyorsan tart 0-hoz. Míg ha valamelyik gyök pozitív, akkor a megoldás exponenciálisan távolodik a 0-tól.

2. $D = 0$, azaz az egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke van λ. Ekkor

   $$y_{\text{H, Á}} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

   Megjegyzés: Negatív gyök esetén megfigyelhető, hogy x növekedésével a megoldás exponenciális gyorsan tart 0-hoz. Míg ha a gyök pozitív, akkor a megoldás exponenciálisan távolodik a 0-tól.

3. $D < 0$, azaz az egyenletnek nem valós, hanem két komplex gyöke van $u + iv$ és $u - iv$ (látható, hogy a gyökök egymás konjugáltjai). Ekkor

$$y_{\text{H, Á}} = c_1 e^{ux}\cos(vx) + c_2 e^{ux}\sin(vx).$$

Megjegyzés: Negatív u esetén megfigyelhető, hogy x növekedésével a megoldás ugyan rezegve, de még mindig exponenciális gyorsan tart 0-hoz. Míg ha u pozitív, akkor exponenciálisan növekvő hullámok keverékei a megoldások. Ha pedig $u = 0$, akkor konstans amplitudójú hullámok keverékei a megoldások.

Inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresése speciális jobboldal esetén

Tegyük fel, hogy a jobboldal

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x),$$

vagy

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

alakú, ahol $P_n(x)$ n-edfokú polinom, továbbá α és β valós számok (lehetnek 0-k is!). A megoldás első lépése ezen mennyiségek meghatározása. Annak megfelelően, hogy $\alpha \pm \beta i$ gyöke-e a karakterisztikus egyenletnek, három esetet különböztetünk meg.

1. $\alpha \pm \beta i$ **nem gyökei a karakterisztikus egyenletnek**. Ekkor van egy partikuláris megoldás

   $$y_{\text{IH, P}} = Q_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + R_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

   alakban, ahol $Q_n(x)$ és $R_n(x)$ n-edfokú polinomok, amelyek együtthatóit az eredeti differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

2. **Egyszeres valós gyök, komplex gyökök, azaz az egyszeres rezonancia esete.** Ekkor valójában két eset van.

   (a) $\beta = 0$ és a karakterisztikus egyenletnek két valós gyöke van λ_1 és λ_2. α pedig ezen gyökök közül az egyik.

   (b) $\beta \neq 0$ és a karakterisztikus egyenlet komplex gyökei $\alpha \pm \beta i$.

   Ekkor mindkét esetben van egy partikuláris megoldás

   $$y_{\text{IH, P}} = xQ_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + xR_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

   alakban, ahol $Q_n(x)$ és $R_n(x)$ n-edfokú polinomok, amelyek együtthatóit az eredeti differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

3. **Kétszeres valós gyök, azaz a kétszeres rezonancia esete.** Tegyük fel, hogy $\beta = 0$ és a karakterisztikus egyenletnek egy darab valós kétszeres gyöke van λ, amire $\lambda = \alpha$ (azaz a gyök megegyezik α-val). Ekkor van egy partikuláris megoldás

   $$y_{\text{IH, P}} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$$

   alakban, ahol $Q_n(x)$ n-edfokú polinom, amely együtthatóit az eredeti differenciálegyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg.

2. Feladatok

1. Határozza meg a következő homogén másodrendű differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a) $y'' - 6y' + 8y = 0$ (b) $y'' - 2y' + 5y = 0$

   (c) $y'' + 4y' = 0$ (d) $y'' - 4y = 0$

   (e) $y'' - 2y' + 10y = 0$ (f) $y'' - 8y' + 20y = 0$

   (g) $y'' - 8y' = 0$ (h) $y'' + 9y = 0$

   (i) $y'' - 8y' + 16y = 0$ (j) $y'' + 6y' + 34y = 0$

2. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (homogén másodrendű egyenletek)!

   (a) $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$ (b) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

   (c) $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 2$ (d) $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = -2$

   (e) $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$ (f) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$

3. Határozza meg a következő inhomogén másodrendű differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a) $y'' - 6y' + 13y = (8x + 4)e^{3x}$ (b) $y'' + 3y' = 6 + 9\sin(3x) + 4e^{-3x}$

   (c)$y'' - 2y' - 3y = 2\cos(3x)$ (d) $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23$

   (e)$y'' - 6y' + 25y = 24xe^{3x} + 2e^{-3x}\sin 4x$ (f) $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$

   (g) $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$ (h) $y'' - y = (2x + 3)e^{x} + xe^{2x}$

   (i) $y'' - 2y' = e^{x}(x^2 + x - 2)$ (j) $y'' + y + \sin(2x) = 0$

   (k) $y'' - 4y' + 3y = xe^{-5x}$ (l) $y'' - 6y' + 5y = e^{x}\sin(x)$

   (m) $y'' - 8y' + 7y = (x + 7)sh(x)$ (n) $y'' - 5y' + 6y = sh(3x)$

   (o) $y'' - 8y' + 20y = e^{2x}\sin(4x)$ (p) $y'' + 4y = 4\cos(2x) + 3\sin(4x)$

   (q) $y'' - 4y' = 2014 + e^{x}$ (r) $y'' - 8y' + 25y = ch(4x)$

4. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (másodrendű inhomogén egyenletek)!

   (a) $y'' + 9y = \cos(3x), \quad y(\pi) = 1, \quad y(-\pi) = 1$ (b) $y'' - 2y' + y = -1, \quad y(2) = -1, \quad y'(2) = e^2$

   (c) $y'' + 4y = x^2 + 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$