Matematika ÉP2
Kétváltozós függvények deriválása, 6. gyakorlat
2014/15. őszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Kétváltozós függvények geometriai interpretációja

Legyen D egy xy-síkbeli tartomány, f pedig egy D-n értelmezett, valós értékű függvény, mely tetszőleges D-beli (x, y) pontnak egy $z = f(x, y)$ értéket feleltet meg. Az $(x, y, f(x, y))$ pontok által meghatározott alakzat a háromdimenziós Descartes-koordinátarendszerben a függvény geometriai megfelelője, ezt a függvény *grafikonjának* nevezzük. A grafikont $z = f(x, y)$ felületnek is nevezzük. A felületről akkor kapunk pontosabb képet, ha megvizsgáljuk a szintvonalait és a koordináta síkokkal való metszetgörbéit. Az xy-sík azon pontjainak összességét, melyekben az f függvény ugyanazt a c konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, az f függvény *szintvonalának* nevezzük.

Tekintsük át a **nevezetes felületeket**!

- *Forgásparaboloid* egyenlete (a legegyszerűbb alakban): $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ennek a szintvonalai koncentrikus körök, az yz és xz-koordináta síkokkal való metszetei parabolák.
- *Hiperbolikus paraboloid vagy nyeregfelület* egyenlete (a legegyszerűbb alakban): $f(x, y) = y^2 - x^2$. Ennek a szintvonalai hiperbolák, az yz-síkkal való metszete a $z = y^2$ konvex parabola, míg az xz-síkkal való metszete a $z = -x^2$ konvex parabola.
- R-sugarú *félgömb* egyenlete: $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$.
- *Forgáskúp* egyenlete: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Az y-tengelyű, R-sugarú *félhenger* egyenlete: $z = \sqrt{R^2 - x^2}$.
- Az *egyköpenyű forgáshiperboloid* egyenlete: $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.
- A *kétköpenyű forgáshiperboloid* egyenlete: $z - x^2 - y^2 = 1$.

Kétváltozós függvények határértéke és folytonossága

A *határérték* definíciója:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$$

akkor és csak akkor, ha minden $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ pontsorozatra fennáll, hogy $f(x_n, y_n) \to A$. *Megjegyzés: az egyváltozós függvények esetén tanult határértékműveletek ebben az esetben is igazak.*

A $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény *folytonos* az értelmezési tartomány (x_0, y_0) pontjában, ha létezik a határérték ebben a pontban és ez egyenlő a függvény ebben a pontban felvett helyettesítési értékével, azaz

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Egy függvény folytonos, ha folytonos az értelmezési tartománya minden pontjában.

Parciális derivált, gradiens, iránymenti derivált, érintő sík

Egy $f(x,y)$ függvényt igen könnyű az egyes változói szerint deriválni, mert ilyenkor a másik változót rögzítettnek képzeljük, és csak a szóban forgó változó egyváltozós függvényének tekintjük a függvényt.
Az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli, x változó szerinti parciális deriváltja

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} = \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Hasonlóan az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli, y változó szerinti parciális deriváltja

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} = \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli, x-szerinti parciális deriváltjának geometriai jelentése nem más, mint a $z = f(x,y)$ felület és az $y = y_0$ egyenletű sík metszésvonala érintőjének meredeksége az (x_0,y_0) pontban. (Hasonlóan értelmezhető az y-szerinti derivált is.)

Parciális deriváltakkal könnyű felírni a $z = f(x,y)$ felület $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontjában az *érintő sík* egyenletét:

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

A parciális deriváltakból álló vektort *gradiens vektor*nak nevezzük.

$$\nabla f(x,y) = \left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right)$$

A gradiens vektor a függvény minden egyes pontjában megadja a legnagyobb meredekség irányát (azaz a gradiens vektor a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat). Lokális minimumban, lokális maximumban vagy egy nyeregpontban a gradiens nulla.

A gradiens vektornak egy tetszőleges irányú $\underline{v}$ egységvektorral való skalárszorzatát

$$f'_{\underline{v}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

az $f(x,y)$ függvény $\underline{v}$ irányban vett *iránymenti derivált*jának nevezzük. Amennyiben az irány α szöggel van megadva, úgy az irányt megadó $\underline{v}$ vektor: $\underline{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Megjegyzés: a magasabbrendű parciális deriváltak jelölése és jelentése is teljesen hasonló az elsőrendű deriváltakhoz. Azaz például

$$f'_{xy}(x,y) = f'_y(f'_x(x,y)).$$

Young-tétele szerint ha $f(x,y)$ és parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy nyílt tartományon, ami tartalmazza (x_0,y_0)-t, akkor $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$ teljesül.

2. Feladatok

1. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát, elsőrendű parciális deriváltjait és azok értelmezési tartományát!

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (b) $f(x,y) = x^y$

   (c) $f(x,y) = y^2 \ln \sqrt{xy}$ (d) $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

   (e) $f(x,y) = \frac{x^3 e^y}{1 + \sin x + y^2}$ (f)$f(x,y) = \frac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$

   (g) $f(x,y) = x \operatorname{tg}(x+y)$ (h) $f(x,y) = x \ln\left(x^2+y^2\right)$

   (i) $f(x,y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$ (j) $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$

   (k) $f(x,y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$ (l) $f(x,y) = \sqrt{x^3 - 5x^2 y + y^4}$

   (m) $f(x,y) = e^{x^2 \sin x - y^2 x^3}$

2. Határozza meg a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait! Ellenőrizze le, hogy valóban teljesül az $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ egyenlőség!

   (a) $f(x,y) = \ln(x + e^y)$ (b) $f(x,y) = x^y$ (c) $f(x,y) = x \operatorname{tg}(x+y)$

   (d) $f(x,y) = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$ (e) $f(x,y) = \frac{y^2}{x+y}$ (f) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

   (g) $f(x,y) = y - xe^y + x$ (h) $f(x,y) = e^{xy}$ (i) $f(x,y) = x\sin(x+y) + y\sin(x+y)$

3. Írja fel az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

   (a) $f(x,y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6$ és $P_0(1,-1)$

   (b) $f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ és $P_0(1,2)$

   (c) $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$ és $P_0(1,2)$

   (d) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\ln(xy)$ és $P_0(2, 1/2)$

   (e) $f(x,y) = x \operatorname{tg}y - y \operatorname{tg}x$ és $P_0(\pi/4, 0)$

   (f) $f(x,y) = 3y + e^{xy^2} + 2y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ és $P_0(0,1)$

   (g) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$ és $P_0(1,1)$

4. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2,-1,3)$ ponton és párhuzamos az $f(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)$ felület $x_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.

5. Az $f(x,y) = \ln(xy)$ felületnek mely pontjaiban párhuzamosak az érintősíkok az $x+y+z=0$ síkkal?

6. Az $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?

7. Határozza meg a következő függvények adott irány szerinti iránymenti deriváltját a megadott pontban!

   (a) $f(x,y) = x^3 - 5xy^2 - 2x + 1, \quad \alpha = 40°, \quad P_0(1,0)$

   (b) $f(x,y) = (x-y)^2, \quad \alpha = \frac{pi}{3}, \quad P_0(2,3)$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \alpha = 135°, \quad P_0(-5,5)$

   (d) $f(x,y) = \sin(xy), \quad \alpha = 150°, \quad P_0(1,0)$

   (e) $f(x,y) = \dfrac{x^2 \ln y}{x^2+3y^2}, \quad \underline{v} = (-3,4), \quad P_0(-1,1)$

   (f) $f(x,y) = \dfrac{xy(1+y)}{x^2+y^2}, \quad \underline{v} = (-4,3), \quad P_0(3,1)$

   (g) $f(x,y) = x^4[2 - \ln(1+y^2)], \quad \underline{v} = (1,3), \quad P_0(1,0)$

   (h) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right), \quad \underline{v} = (1,3), \quad P_0(-3,-4)$

8. Határozza meg mely irány esetén lesz nulla az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y$ függvény $P_0(2,0)$ pontbeli iránymenti deriváltja! És mely irány esetén lesz maximális az iránymenti derivált?

9. Milyen irányban lesz az $f(x,y) = y^3 e^{-2x-1}$ függvény $(\frac{1}{2},1)$ pontbeli iránymenti deriváltja maximális, illetve minimális?

10. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 e^y$ függvgény $P_0(2,0)$ pontbeli, a $\underline{v} = (3,4)$ vektorra merőleges iránymenti deriváltját!