

# Matematika ÉP2

## Kétváltozós függvények integrálása, 8. gyakorlat 2014/15. őszi félév

### 1. Elméleti összefoglaló

#### Kétváltozós függvények integrálszámítása

Az egyváltozós függvények Riemann-összege általánosítható kétváltozós esetre is. Ekkor egy az  $xy$  síkban fekvő  $T$  tartományt téglalapokra osztunk fel, és ezekhez tartozó "téglalattestekkel" közelítjük a  $T$  tartományt és a  $z = f(x, y)$  függvény közé eső térfogatrészt. Be lehet látni, hogy akárcsak az egyváltozós esetben, ha az  $f(x, y)$  függvény folytonos a korlátos és zárt  $T$  tartományon, akkor ott integrálható is. Az integrál kiszámítása általában függ attól, hogy milyen tartományon integrálunk: téglalap tartományon, normál tartományon vagy egyéb tartományon. Ugyanakkor az tetszőleges tartományra igaz a fentiek alapján, hogy amennyiben létezik a kettős integrál a  $T$  tartományon, akkor az előjeles térfogatot jelent. Azaz amennyiben  $f(x, y)$  grafikonja az  $xy$ -sík felett helyezkedik el, akkor a kettős integrál értéke nem más, mint azon  $T$  fölötti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet alulról az  $xy$ -sík felülről pedig a  $z = f(x, y)$  határol. Ha  $f(x, y)$  grafikonja az  $xy$ -sík alatt helyezkedik el, akkor a  $\int \int_T f(x, y) dA$  nem más, mint azon  $T$  alatti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet felülről az  $xy$ -sík alulról pedig a  $z = f(x, y)$  határol. Ha  $\int \int_T f(x, y) dA = 0$ , akkor ez azt jelenti, hogy ugyanannyi térfogatrészünk van az  $xy$ -sík felett, mint alatta. Emellett természetesen a kettős integrálokra is általánosíthatóak az egyváltozós függvények Riemann-integráljánál tanult tulajdonságok.

#### Kettős integrál téglalap tartományon

*Fubini tétel:* Ha  $f(x, y)$  folytonos a  $T = [a, b] \times [c, d]$  zárt téglalap tartományon, akkor

$$\int \int_T f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

#### Kettős integrál normál tartományon

*x-szerinti normál tartomány:* A  $T_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ és } c(x) \leq y \leq d(x)\}$ , röviden az  $a \leq x \leq b$  és  $c(x) \leq y \leq d(x)$  tartományt *x-szerinti normál tartománynak* nevezzük.

*y-szerinti normál tartomány:* A  $T_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ és } a(y) \leq x \leq b(y)\}$ , röviden az  $c \leq y \leq d$  és  $a(y) \leq x \leq b(y)$  tartományt *y-szerinti normál tartománynak* nevezzük.

*Fubini tétel, erősebb alak:* Legyen  $f(x, y)$  folytonos függvény a  $T$  tartományon

1. Ha  $T = \{a \leq x \leq b \text{ és } c(x) \leq y \leq d(x)\}$   $x$ -szerinti normál tartomány, ahol  $c(x)$  és  $d(x)$  folytonos függvények, akkor

$$\int \int_T f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Ha  $T = \{c \leq y \leq d \text{ és } a(y) \leq x \leq b(y)\}$   $x$ -szerinti normál tartomány, ahol  $a(y)$  és  $b(y)$  folytonos függvények, akkor

$$\int \int_T f(x, y) dA = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

3. Ha  $T$  mindkét tengelyre nézve normál tartomány, akkor a két integrál egyenlő (ez biztosítja az integrálás sorrendjének megváltoztathatóságát).

### Kettős integrál egyéb tartományon

*Integráltranszformáció:* Ha az  $xy$ -síkon minden  $(x, y)$  koordinátájú ponthoz hozzárendelünk egy  $(x(u, v), (y(u, v))$  pontot az  $uv$ -síkból, azaz  $f(x, y) = f(x(u, v), (y(u, v))$ , és az  $xy$ -síkbeli  $T$  tartomány  $uv$ -síkbeli megfelelőjét  $G$  tartományként jelöljük, továbbá ha a  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}$  és  $\frac{\partial y}{\partial v}$  parciális deriváltak léteznek és folytonosak, valamint

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Jacobi determináns sehol sem 0, akkor

$$\int \int_T f(x, y) dx dy = \int \int_G f(x(u, v), (y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv.$$

Ennek alkalmazása a polárkoordinátás transzformáció, amit akkor érdemes használni, ha a tartományunk körlap, kör-cikk, körgyűrű, vagy ezek valamilyen részhalma. Itt az  $xy$ -síkról az  $r\varphi$ -síkra történik a transzformáció, ahol  $r$  jelöli az  $(x, y)$  pont origótól vett távolságát,  $\varphi$  pedig a pont helyvektorának az  $x$ -tengely pozitív irányával bezárt szögét. Azaz

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi \quad \text{és} \quad y(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

helyettesítést használva a Jacobi-determináns:

$$J(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} = r$$

azaz

$$dx dy = r dr d\varphi.$$

### Kettős integrál alkalmazásai

Egy  $T$  korlátos zárt síktartomány *területe* (ha az integrál létezik és véges):

$$Ter = \int \int_T dA.$$

A  $T$  tartomány felett az  $f(x, y)$  által meghatározott felület *felszíne* (ha az integrál létezik és véges):

$$A = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dA.$$

Ha egy vékony,  $T$  tartományt borító fémlemez tömegeloszlásáról feltesszük, hogy folytonos,  $\delta(x, y)$ -nal jelöljük a fémlemez anyagának sűrűségfüggvényét (az egységnyi területen lévő tömeget), akkor a fémlemez tömege, az  $x$ -, valamint  $y$ -tengelyre vonatkozó forgatónyomatékai és tömegközéppontjának koordinátái a következő képletekkel számolható ki (ha az integrálok léteznek és végesek):

tömeg:

$$M = \iint_T \delta(x, y) dA;$$

forgatónyomatékok:

$$M_x = \iint_T y \delta(x, y) dA;$$

$$M_y = \iint_T x \delta(x, y) dA;$$

ezek segítségével a tömegközéppont koordinátái:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{és} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

## 2. Feladatok

1. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott téglalap tartományokon!

(a)  $\iint_T (12x - 6y - 5) dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq 2 \text{ és } -3 \leq y \leq 3\}$ ;

(b)  $\iint_T \sin(x + y) dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ és } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ ;

(c)  $\iint_T (x^2 + 4y) dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(d)  $\iint_T e^{3x+4y} dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq \ln 2 \text{ és } 0 \leq y \leq \ln 3\}$ ;

(e)  $\iint_T e^{-x-y} dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq a \text{ és } 0 \leq y \leq a\}$ , ahol  $a$  pozitív egész paraméter;

(f)  $\iint_T xy e^{x^2+y^2} dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(g)  $\iint_T \frac{x}{x^2 + y^2} dA =$ , ahol  $T = \{1 \leq x \leq \sqrt{3} \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(h)  $\iint_T \frac{2xy}{x^2 + y^2} dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(i)  $\iint_T xy \sin(x^2 + y^2) dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ és } 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$ ;

2. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott normál tartományokon!

- (a)  $\int \int_T 2xy \, dA =$ , ahol  $T$  az  $y = x^2$  és  $y = \sqrt{x}$  görbék által határolt zárt síkrész;
- (b)  $\int \int_T 2y \, dA =$ , ahol  $T$  az  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  és  $y = 1$  görbék által határolt zárt síkrész;
- (c)  $\int \int_T \frac{2y}{x+1} \, dA =$ , ahol  $T$  az  $y = 0$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$  és  $x = 2$  görbék által határolt zárt síkrész;
- (d)  $\int \int_T y \sin x \, dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq x \leq y \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$  háromszög;
- (e)  $\int \int_T (x^2 + y) \, dA =$ , ahol  $T = \{y^2 \leq x \leq \sqrt{y} \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$
- (f)  $\int \int_T \cos(x - y) \, dA =$ , ahol  $T$  az  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(3, 1)$  és  $D(4, 0)$  csúcspontú trapéz;
- (g)  $\int \int_T (x^2 + 2y) \, dA =$ , ahol  $T$  az  $A(1, 1)$ ,  $B(0, 3)$  és  $C(3, 0)$  csúcspontú háromszög;
- (h)  $\int \int_T x e^y \, dA =$ , ahol  $T$  az  $y = x^2$  és  $y = x$  görbék által határolt zárt síkrész;
- (i)  $\int \int_T 1 + \frac{x}{2} - y \, dA =$ , ahol  $T$  az  $y = x^2 - 4$  és  $y = 0$  görbék által határolt zárt síkrész;
- (j)  $\int \int_T 4 - y^2 \, dA =$ , ahol  $T$  az  $y = 2 - x^2$  és  $y = x^2 - 2$  görbék által határolt zárt síkrész;
- (k)  $\int \int_T (x^2 + y^2) \, dA =$ , ahol  $T$  az  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 0)$  és  $C(0, 2)$  csúcspontú háromszög;
- (l)  $\int \int_T y \, dA =$ , ahol  $T$  az  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  és  $y = 2$  görbék által határolt zárt síkrész.

3. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott egyéb tartományokon! (Segítség: Végezzen polárkoordinátás helyettesítést!)

- (a)  $\int \int_T 2x - 6y + 3 \, dA =$ , ahol  $T$  az origó középpontú 2 sugarú körlap;
- (b)  $\int \int_T \frac{2xy}{x^2 + y^2} \, dA =$ , ahol  $T = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (c)  $\int \int_T \ln(x^2 + y^2) \, dA =$ , ahol  $T$  az origó középpontú 1 és 4 sugarú körök által határolt körgyűrű;
- (d)  $\int \int_T \ln(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \, dA =$ , ahol  $T$  az origó középpontú 1 és 4 sugarú körök által határolt körgyűrű;

(e)  $\int \int_T \frac{x+y}{x^2+y^2} dA =$ , ahol  $T = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, 0 \leq y\}$

(f)  $\int \int_T (x^2 - y^2) dA =$ , ahol  $T = \{0 \leq r \leq 1 \text{ és } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$  körcikk;

(g)  $\int \int_T \sqrt{100 - x^2 - y^2} dA =$ , ahol  $T$  az origó középpontú 5 sugarú kör;

(h)  $\int \int_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dA =$ , ahol  $T$  az origó középpontú, egységsugarú kör pozitív síknegyedbe eső része;

(i)  $\int \int_T xy^2 dA =$ , ahol  $T$  az origó középpontú,  $R$  sugarú kör első síknegyedbe eső része;

(j)  $\int \int_T xy^2 dA =$ , ahol  $T$  az origó középpontú  $R$  és  $2R$  sugarú körök által határolt körgyűrű első síknegyedbe eső része.

4. Egy négyzet alaprajzú  $(-a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a)$  terem  $z = \frac{xy}{a^2} + b$  egyenletű felülettel fedik le. Mennyi a terem térfogata?
5. Határozza meg a  $z = 25 - x^2 - y^2$  egyenletű felület  $z \geq 0$  félsíkba eső részének felszínét és az általa határolt korlátos térrész térfogatát!
6. Határozza meg a homogén lemezből kivágott  $R$  sugarú negyedkör lap tömegközéppontját!
7. Határozza meg az  $f(x, y) = xy$  nyeregfelület  $x^2 + y^2 \leq 1$  egyenletű hengerbe eső részének felszínét!
8. Határozza meg az  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  paraboloid  $xy$ -sík feletti részének felszínét!
9. Határozza meg a  $T = \{x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$  félkör alakú tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!
10. Határozza meg a  $T = \{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1, y \geq 0\}$  félkör alakú tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!