2012-2013/1. A1 **1. zárthelyi megoldókulcs** **A**

1. a) (5 pont) Mit tudsz egy komplex szám n-edik gyökeiről?

Megoldás: n darab van belőlük **(1p)**, melyek egy origó középpontú, szabályos n-szöget alkotnak **(2p)**. Abszolút értékük az eredeti szám abszolút értékének n-edik gyöke **(2p)**.

Megjegyzés: az általános képlet is jó válasznak, azaz a $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám n-edik gyökei: $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$. **(5p)**

b) (10 pont) Add meg az összes olyan z komplex számot, amelyre $z^2 = 2z - 2\overline{z}$.

Megoldás: Legyen $z = x + yi$, ahol x és y valós számok. Ekkor

$$\begin{aligned}(x^2-y^2)+2xyi &= 2(x+yi)-2(x-yi)\\ (x^2-y^2)+2xyi &= 4yi \quad \textbf{(2p)}\end{aligned}$$

A megoldandó egyenletrendszer: (1) $x^2 - y^2 = 0$, (2) $2xy = 4y$ **(2p)**.
Az első egyenletből $x = y$ vagy $x = -y$ **(1p)**.
$x = y$ esetén a (2) egyenletből $2y^2 - 4y = 2y(y-2) = 0$, azaz $y = 0$ vagy $y = 2$ **(2p)**.
$x = -y$ esetén a (2) egyenletből $-2y^2 - 4y = -2y(y+2) = 0$, azaz $y = 0$ vagy $y = -2$ **(1p)**.
Tehát a megoldás: $z_1 = 0, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 2 - 2i$ **(2p)**.
B csoport: $z_1 = 0, z_2 = -3 + 3i, z_3 = -3 - 3i$

2. a) (5 pont) Mit nevezünk egy valós számsorozat torlódási pontjának?

Megoldás: a torlódási pontja a_n-nek, ha a_n-ből kiválasztható a-hoz tartó részsorozat **(5p)**.

b) (10 pont) Egy egyre pontosodó mérési sorozat n-edik mérésének eredménye

$$a_n = \frac{2-5n}{4-3n}.$$

Hányadik mérés után csökken a mért mennyiség és a mért érték eltérésének abszolút értéke (azaz a hiba) $\varepsilon = 10^{-3}$ alá?

Megoldás: A sorozat határértéke $\frac{5}{3}$ **(2p)**. A megoldáshoz az $\left|\frac{2-5n}{4-3n} - \frac{5}{3}\right| < 10^{-3}$ egyenletet kell megoldani **(2p)**. Közös nevezőre hozva: $\left|\frac{-14}{12-9n}\right| < 10^{-3}$ **(2p)**, azaz $\frac{14}{9n-12} < 10^{-3}$, ahonnan $n > \frac{14012}{9}$ **(2p)**, tehát a megoldás $\left[\frac{14012}{9}\right] + 1$ **(2p)**.

B csoport: $n > \frac{263}{5}$, azaz az 53. méréstől kezdve.

3. a) (5 pont) Mi a Cauchy-féle konvergenciakritérium?

Megoldás: Az a_n számsorozat pontosan akkor konvergens, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ha $n, m > N(\varepsilon)$.

b) (10 pont) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n+7}{10n-3}\right)^{4-5n}$ határértéket!

Megoldás: $= \lim\left(\dfrac{1+\frac{7}{10n}}{1-\frac{3}{10n}}\right)^{4-5n}$ **(3p)** $= \lim \dfrac{\left(\left(1+\frac{7}{10n}\right)^n\right)^{-5}\cdot\left(1+\frac{7}{10n}\right)^4}{\left(\left(1-\frac{3}{10n}\right)^n\right)^{-5}\cdot\left(1-\frac{3}{10n}\right)^4}$ **(3p)** $=$
$\dfrac{(e^{7/10})^{-5}\cdot 1}{(e^{-3/10})^{-5}\cdot 1}$ **(2p)** $= e^{-5}$ **(2p)**

B csoport: $= e^{-6}$

4. a) (5 pont) Definiáld egy függvény inverzének a fogalmát! Adj szükséges és elégséges feltételt egy függvény invertálhatóságára!

Megoldás: Az f függvény inverze g, ha $f \circ g$ az identitás függvény **(2p)**. f pontosan akkor invertálható, ha minden értéket csak egy helyen vesz fel **(3p)**.

b) (10 pont) Legyen $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x^2-3x+8}$. Számítsd ki a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ és $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ határértékeket!

Megoldás: $f(x) = (\sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x^2-3x+8}) \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x^2-3x+8}}{\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x^2-3x+8}}$ **(2p)**

$= \dfrac{5x-11}{\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x^2-3x+8}}$ **(2p)**. így

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{x}{x} \cdot \frac{5-\frac{11}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}} \ \textbf{(2p)} = \frac{5-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0+0}} = \frac{5}{2} \ \textbf{(1p)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{5-\frac{11}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}} \ \textbf{(2p)} = (-1) \cdot \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} \ \textbf{(1p)}$$

B csoport: $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\dfrac{9}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \dfrac{9}{2}$