Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Matematika Intézet

A Matematika A1a tárgy gyakorlati anyaga

vegyész és környezetmérnök hallgatóknak

Összeállította: Ruzsa Zoltán

BME Budapest

2012

1. feladatsor: valós számok, halmazok, függvények

1. Így szokás halmazokat definiálni: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$. Definiáljuk:
   - a) 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza,
   - b) racionális; irracionális számok halmaza,
   - c) a négyzetszámok halmaza,
   - d) a második síknegyed pontjai,
   - e)$^{\text{hf}}$ páros számok halmaza,
   - f)$^{\text{hf}}$ prímszámok halmaza,
   - g)$^{\text{hf}}$ az egységsugarú gömbön belüli pontok,
   - h)$^{\text{hf}}$ harmadfokú polinomok halmaza.

2. Fogalmazzuk meg, hogy mit mondanak a következő állítások. Melyek igazak és melyek nem a valós számok körében? Írjuk fel az állítások tagadását!
   - a) $\forall x\ \exists y\ (y > x)$
   - b) $\exists a\ \forall b\ (b^a > 0)$
   - c) $p > 0 \Rightarrow \big[\exists q\ (p = q^2)\big]$
   - d)$^{\text{hf}}$ $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x = y^z)$
   - e)$^{\text{hf}}$ $x > 0 \Leftrightarrow \big[\exists y\ (y > 0\ \wedge\ x - y > 0)\big]$
   - f)$^{\text{hf}}$ $\big[x \in \mathbb{N}\ \wedge\ y \in (\mathbb{N} \setminus \{1, x\})\big] \Rightarrow x/y \notin \mathbb{N}$

3. Tanulmányozzuk a valós számegyenes szerkezetét:
   - a) Melyik a legkisebb pozitív valós szám?
   - b) Mi van két szomszédos valós szám között?
   - c) Létezik két olyan irracionális szám, amelyek között nincs racinoális szám?
   - d)$^{\text{hf}}$ Létezik két olyan racionális szám, amelyek között nincs irracionális szám?
   - e)$^{\text{hf}}$ Mutassuk meg, hogy minden intervallumon van racionális és irracionális szám is.

4. Ábrázold az adott függvényeket, és állapítsd meg, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. (Páros? Páratlan? Periodikus? Értékkészlet? Értelmezési tartomány?)
   - a) $-3x + 4$
   - b) $-x^2 + 3x + 1$
   - c) $\dfrac{1}{x+2}$
   - d) e^{-x}
   - e) $\sin 2x$
   - f) $\ln x + 1$
   - g) $\operatorname{tg}(-x)$
   - h)$^{\text{hf}}$ $\log_{1/3}(2x - 1)$
   - i)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{2}{x^2}$
   - j)$^{\text{hf}}$ 3^{2x+1}
   - k)$^{\text{hf}}$ $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
   - l)$^{\text{hf}}$ $\operatorname{ctg} \dfrac{x}{3}$

5.$^{\text{hf}}$ Lássuk be hogy
   - a) a valós számok között nincs minimális.
   - b) az $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak nincs legkisebb eleme.
   - c) az $\ln x$ függvény se alulról, se felülről nem korlátos.

6.$^{\text{hf}}$ Egy kereskedő kétkarú mérleggel mér, ám tudja, hogy a mérlege pontatlan: az egyik karja rövidebb mint a másik. Ezért ha valaki 1 kiló cseresznyét kér, lemér fél kilót az egyik tányérban, majd felet a másikban is, félkilós súlyt használva ellensúlyként. Mi erről a véleményünk?

Emlékeztető

– Logikai jelek: $\forall$ minden; $\exists$ létezik; $\exists!$ létezik egyetlen; $\wedge$ és; $\vee$ vagy; $\neg$ nem; $\Rightarrow$ következik; $\Leftrightarrow$ ekvivalens;
Halmazok: $\mathbb{N}$ természetes számok; $\mathbb{Z}$ egészek; $\mathbb{Q}$ racionálisok; $\mathbb{R}$ valós számok; $\emptyset$ üres halmaz.

– Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *páros*, ha $\forall x$-re $f(-x) = f(x)$. *Páratlan*, ha $\forall x$-re $f(-x) = -f(x)$. *Periodikus α periódussal*, ha $\forall x$-re $f(x + \alpha) = f(x)$.

– MINDEN feladat, amit a gyakorlaton nem beszélünk meg, házi feladat. Amit eleve házi feladatnak szánok, az $^{\text{hf}}$-al van megjelölve.

– Látogassátok meg a tantárgy weblapját! További információk, az oktatók elérhetősége, a feladatsorok találhatóak ott. `http://www.math.bme.hu/~nagyi/a1`

2. feladatsor: sorozatok, komplex számok

1. Állapítsuk meg, hogy nullsorozat-e! Ha igen, akkor oldjuk meg a *közelítés alapfeladatát*, azaz a definíció alapján keressünk N küszöböt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz.

   a) $a_n = 0$ b) $b_n = \dfrac{1}{n}$ c) $c_n = (-1)^n$

   d) $d_n = \dfrac{1}{n^2}$ e)$^{\text{hf}}$ $e_n = \sin n$ f)$^{\text{hf}}$ $f_n = \dfrac{(-1)^n}{\log_{10} n}$

2. Határozzuk meg a határértékeket, és keressünk N küszöböt ε-hoz a definíció alapján!

   a) $\lim \dfrac{3n-1}{4n+99}$ b)$^{\text{hf}}$ $\lim \dfrac{7n+4}{2n-1}$ c)$^{\text{hf}}$ $\lim \dfrac{n-6}{6n^2+16}$

3. Legyen $z = 1 - 4i$. Mi lesz $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$?

4. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:

   a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 3\}$ c) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < -2\}$

   d) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-3| = 2\}$ e) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| = |z-2|\}$ f) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 3\}$

   g) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < \arg z < 2\}$ h)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+2i| = \pi\}$ i)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| \geq |z|\}$

   j)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$ k)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ -3 > \operatorname{Re} z \geq 0\}$ l)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \ : \ z = \bar{z}\}$

5. Mi lehet z, ha...

   a) $\bar{z} - z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$ b) $\operatorname{Im} z = 1$, $|z| = \sqrt{2}$

   c)$^{\text{hf}}$ $\arg z = 3\pi/4$, $\operatorname{Re} z = 5$ d)$^{\text{hf}}$ $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $|z-2| = 3$

6.$^{\text{hf}}$ Lenkétől vizsgán megkérdezik a sorozat konvergenciájának fogalmát. Ezt válaszolja:
„Az a_n sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan a szám, amelyhez a_n egyre közelebb kerül." Meg fog bukni?
Lenke az ismételt vizsgán is ugyanezt a kérdést kapja. Most így felel:
„Az a_n sorozat pontosan akkor tart a-hoz, ha $|a_n - a|$ tart 0-hoz." Most átmegy?

Emlékeztető

– Az $a_1, \ a_2, \ \ldots \ a_k, \ \ldots$ valós számokból álló *sorozatot* (a_n) jelöli.

– Az a_n sorozat *nullsorozat*, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n| < \varepsilon$. Ezt kétféleképp lehet jelölni: $a_n \to 0$ vagy $\lim a_n = 0$.

– Az a_n sorozat *határértéke az a szám*, jelölve $a_n \to a$ vagy $\lim a_n = a$, ha $a_n - a$ nullsorozat. Ekkor a_n *konvergens*, különben *divergens*.
(Közvetlenül ez így is fogalmazható: $\lim a_n = a$, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.)

– A *komplex számok* a $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alakú számok, ahol $i = \sqrt{-1}$. Az itt szereplő a a szám *valós része*, azaz $\operatorname{Re}(z) = a$, míg b az *imaginárius*, vagy *képzetes része*, azaz $\operatorname{Im}(z) = b$.
Minden 0-tól különböző komplex szám alkalmas $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$-vel egyértelműen írható $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ alakba. Itt r a szám *abszolút értéke*, azaz $|z| = r$, φ az *argumentuma*, azaz $\arg(z) = \varphi$.
Egy $z = a + ib$ komplex szám *konjugáltja*: $\bar{z} = a - ib$.

3. feladatsor: sorozatok, komplex számok 2.

1. A gonosz varázsló minden nap arannyá változtatja a Földön lévő vízmennyiség felét. Mennyi idő múlva csökken a vízkészlet 1 pohárnyi alá? (A Földön kb. $1386 \cdot 10^6$ km^3 víz van.)
$^{\text{hf}}$ Mennyi idő múlva marad csak 1 vízmolekula?

2. Íjuk fel formulával (minél kevesebb zárójellel) az a_n sorozatra vonatkozó állításokat:
   a) a_n korlátos,
   b) a_n monoton növekvő,
   c)$^{\text{hf}}$ $a_n \not\to a$,
   d)$^{\text{hf}}$ a_n divergens.

3. Számítsd ki az $a_n = \left(\sqrt{n^2+n-3}-n\right)$ sorozat határértékét, és keress N küszöbindexet az $\varepsilon = 0.01$ hibahatárhoz! Bizonyítsd be, hogy tényleg annyi a határérték!

4. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z+1) = |z-1|\right\}$ halmazt!

5. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$ alakba!

a) $(1+4i)(4-2i)$	b) i^7	c) $\dfrac{3-2i}{-2+i}$	d) $\dfrac{3-2i}{3i}$
e)$^{\text{hf}}$ i^{2009}	f)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{1}{i}$	g)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{2-i}{i-1}$	h)$^{\text{hf}}$ $(2+i)^{37}(2-i)^{38}$

6.$^{\text{hf}}$ Egy egyre pontosodó mérési sorozat n. mérésének eredménye $a_n = 1+(-1)^{n+1}2^{3-n}$. Hányadik mérés után csökken a mért mennyiség és a mért érték eltérése (azaz a hiba) $\varepsilon = 10^{-4}$ alá?

7.$^{\text{hf}}$ Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i| + |z+3| = 7\right\}$ halmazt!

8.$^{\text{hf}}$ Melyek tulajdonságok értelmezhetőek az alábbiakból egy komplex számokból álló (z_n) sorozatra?
   a) korlátosság
   b) monotonitás
   c) konvergencia

9.$^{\text{hf}}$ Pistike rondán ír, és a füzetében nem tudja eldönteni, hogy egy helyen $\bar{z}^2$, (azaz $(\bar{z})^2$) vagy pedig z^{-2} (azaz $(z)^{-2}$) áll. Van olyan z komplex szám, amelyre ez a két szám egyenlő?

10.$^{\text{hf}}$ Hol a hiba? $\quad -1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1}\sqrt{1} = \left(\sqrt{1}\right)^2 = 1$

4. feladatsor: sorozat határértéke

1. Számoljuk ki a határértékeket:

a) $\lim \dfrac{n^{-1}}{1+n^{-2}}$ b) $\lim \dfrac{n^5-216n^2+n-2}{-n^8+500n^4+86}$

c) $\lim \dfrac{n^{22}+18n^{18}}{8n^{22}-4n^2}$ d) $\lim \dfrac{2^n+82n^{47}+23610}{-14n^{25}+2n^8+3}$

e) $\lim \dfrac{5^n+401n+402}{2^{2n}+n-88}$ f) $\lim \dfrac{(n+1)!}{(5-2n)n!}$

g) $\lim \left(\sqrt{4n-3}-\sqrt{n+9}\right)$ h) $\lim \left(\sqrt{2n^2+5n-3}-\sqrt{2n^2-n}\right)$

i) $\lim \dfrac{25n!+n^{25}}{25n^n}$

2. Igaz? Hamis?
   a) ha $a_n \to a$, akkor $a_n^2 \to a^2$
   b) ha $a_n^2 \to a^2$, akkor $a_n \to a$
   c) ha $a_n > 0$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n b_n \to \infty$

3. Vizsgáljuk: korlátosság, supremum, infimum, határérték.
   a) $\dfrac{\cos(n\pi)}{n}+(-1)^{n+1}$ b) $(-2)^n+\dfrac{1}{n!}$ c)[hf] n^{-n}
   d)[hf] $n^{(-1)^n}$

4. Mennyi lehet $\lim a^n$ értéke (a-tól függően, $a \in \mathbb{R}$)?

5.[hf] Igaz? Hamis?
   a) $a_n \to 0 \;\Rightarrow\; 1/a_n \to \infty$ b) $a_n \to \infty \;\Rightarrow\; 1/a_n \to 0$
   c) $[a_n > 0$ és a_n konvergens$] \;\Rightarrow \lim a_n > 0$ d) $[a_n$ korlátos, $b_n \to 0] \;\Rightarrow\; a_n b_n \to 0$

6.[hf] Számold ki a következő határértékeket:

a) $\lim \dfrac{n^{2/3}+8n^{\sqrt{3}}+\sqrt{n}+12}{n^2+5n-7}$ b) $\lim \dfrac{n^{-2}+4}{2n^{-3}-1}$

c) $\lim \dfrac{9\sqrt[3]{n}-3\sqrt{2n}+1}{\sqrt[4]{n}+\sqrt{3n}}$ d) $\lim \dfrac{\log_{10}(n^2)+3}{\log_3(n)-1}$

e) $\lim \dfrac{n^3 2^n+3^n}{n^{2n}-3n^2}$ f) $\lim \dfrac{7^n+n^7+7}{2^{2n}+(2n)^2+2}$

g) $\lim \left(\sqrt{n^4+2n}-n^2\right)$ h) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3-3n+3}-\sqrt[3]{n^3+123n^2-1}\right)$

7.[hf] Legyen $p(x)$ és $q(x)$ egy-egy polinom. Adjunk módszert $\lim \dfrac{p(n)}{q(n)}$ meghatározására!

Emlékeztető

– Ha a_n divergens, de $\forall K$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n > K$, akkor $a_n \to \infty$.

– Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *infimuma* (azaz $\inf H$) a H halmaz alsó korlátjai közül a legnagyobb.
H *supremuma* (azaz $\sup H$) pedig H felső korlátjai közül a legkisebb.
H *minimuma* l, ha $l \in H$ és $l = \inf H$. H *maximuma* h, ha $h \in H$ és $h = \sup H$.
Egy sorozat infimuma, supremuma az elemei által alkotott halmaz infimuma, supremuma.

5. feladatsor: n. gyökvonás, speciális sorozatok

1. Írjuk a következő komplex számokat $a+ib$, esetleg $r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ alakba!

   a) $(1-i)^{997}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{i}$ d) $\sqrt[3]{1}$

   e) $\sqrt[3]{1+i}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sqrt[3]{27i}$ g)$^{\text{hf}}$ $(1+i\sqrt{3})^{100}$ h)$^{\text{hf}}$ $\sqrt{\dfrac{i}{i-3}}$

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket a komplex számok körében. Az egyenletekben szereplő polinomoknak írjuk fel a gyöktényezős felbontását!

   a) $z^2 - iz + 3 + 2i = 0$
   b) $z^3 - 8 = 0$
   c)$^{\text{hf}}$ $\bar{z} - z = 0$
   d)$^{\text{hf}}$ $3z^2 - iz^2 + 3iz + 6 - i = 0$
   e)$^{\text{hf}}$ $z^6 + 16z^2 = 0$

3. Számoljuk ki:

   a) $\lim\left(1-\dfrac{3}{n^3}\right)^{n^3}$ b) $\lim\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{n-3}$ c) $\lim\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta n}\right)^{\gamma n+\delta}$

   d) $\lim\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n}$ e)$^{\text{hf}}$ $\lim\left(1+\dfrac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}$ f)$^{\text{hf}}$ $\lim\left(\dfrac{n^2+2n-5}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

4. Felhasználva hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$, számoljuk ki:

   a) $\lim \sqrt[99n]{n}$ b) $\lim \sqrt[n]{99n^{99}}$ c) $\lim \sqrt[n^2]{n}$ d)$^{\text{hf}}$ $\lim \sqrt[n!]{n}$ e)$^{\text{hf}}$ $\lim \sqrt[n]{n!}$

5.$^{\text{hf}}$ Egy szabályos hatszög egyik csúcsa $2+i$, középpontja $3+2i$. Írjuk fel a többi csúcsát!

6.$^{\text{hf}}$ Legyen z egy tetszőleges komplex szám. Mi a következő 4 szám viszonya?

   a) z b) $|z|$ c) $\sqrt{z^2}$ d) $\left(\sqrt{z}\right)^2$

7.$^{\text{hf}}$ A plutónium-238 felezési ideje 87.7 év. Jelöljük a_n-el egy gyártáskor 50 kilogramm Pu-238-at tartalmazó atombombában n év eltelte után maradó Pu-238 tömegét. Írjuk fel az a_n sorozatot! Hányadik évben fog a Pu-238 tömege 0.1 kilogramm alá csökkenni?

Emlékeztető

– $(r\cos\alpha + ri\sin\alpha)(s\cos\beta + si\sin\beta) = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

– $\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)$ ahol $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1)$

– A *rendőr-szabály*, vagy *csendőr elv*: Ha $a_n \le b_n \le c_n$, és $\lim a_n = \lim c_n = h$, akkor $b_n \to h$ is.

– Előadáson láttátok, hogy az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, és a határértékére bevezettük az e jelölést.
Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

6. feladatsor: függvények, határérték

1. Mi lesz az $f \circ g$, mi lesz a $g \circ f$ függvény, ha... (adjuk meg az értelmezési tartományukat is)

   a) $f(x) = x - 7 \quad g(x) = x^2$. b) $f(x) = x^2 \quad g(x) = \sqrt{x}$.

   c) $f(x) = |x| \quad g(x, y) = x - y$. d) $f(z) = (\operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z) \quad g(x, y) = x^2 + y^2$.

2. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

   a) $\sin x$ b) $2 \sin x$ c) $1 + 2 \sin x$ d) $1 + 2 \sin(x - 1)$ e) $1 + 2 \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

3. A definíció alapján határozzuk meg a határértékeket. Számoljuk ki, hogy x-nek mennyire kell közel lennie x_0-hoz ahhoz, hogy a függvényérték a határértéket legalább $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal megközelítse.

   a) $\lim\limits_{x\to 4} 3x - 1$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ c)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to -1} (x^2 + 3x - 1)$ d)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2(x^2 - 1)}{x + 1}$

4. Piroska olyan kört szeretne rajzolni, amelynek területe $100\,\text{cm}^2$. Mekkorát hibázhat a körző kinyitásánál ahhoz, hogy a kör területe maximálisan 1 cm eltéréssel $100\,\text{cm}^2$ legyen?

5. Ábrázoljuk az alakzatot, majd módosítsuk a képletét úgy, hogy a megadott transzformációk történjenek a képével.

   a) $f(x) = -\sqrt{x}$, eltolás: $\rightarrow 3$ b) $x^2 + y^2 = 49$, eltolás: $\swarrow 2$

   c) $y = \sqrt{4 - x^2}$, nyújtás: $\leftrightarrow 1/2$ d)$^{\text{hf}}$ $f(x) = x^2$, eltolás: $\downarrow 3,\ \leftarrow 2$

   e)$^{\text{hf}}$ $y = x^2 - 1$, nyújtás: $\updownarrow 3$ f)$^{\text{hf}}$ $x^2 + y^2 = 1$, nyújtás: $\leftrightarrow 3$

6.$^{\text{hf}}$ Egészítsük ki a táblázatot:

$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$
$\|x\|$	$\ln x$	
$\ln x$	$\|x\|$	
	$\ln x$	$\cos(x^2)$
$\ln x$		$\cos(x^2)$
$\sin\sqrt{x}$		$\ln x$

7.$^{\text{hf}}$ Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, és ábrázoljuk őket. Amelyik invertálható, annak írjuk fel az inverzét is, majd ábrázoljuk azt is.

   a) $(x + 3)^5$ b) $\sin(2x + 1)$ c) $\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 3$ d) 5^{2x}

8.$^{\text{hf}}$ Viktor 10 méterről szeretné a labdát az 1 méter széles teremfoci-kapu közepébe gurítani. Hány fokot tévedhet a célzásnál, hogy a labda még bemenjen a kapuba?

Emlékeztető

– Ha $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, akkor $f \circ g$ egy olyan függvény, amelyre $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek g az *inverze*, ha $(f \circ g)(x) = x$. $f(x)$ inverzét $f^{-1}(x)$ jelöli.

– Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek *a határérétéke x_0-ban a*, (jelölésben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$), ha minden $(x_n) \to x_0$, $x_i \neq x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to a$.
Ekvivalens definíció: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta$, hogy $|x - x_0| < \delta$, és $x \neq x_0$ esetén $|f(x) - a| < \varepsilon$.

7. feladatsor: határértékszámolás, folytonosság

1. Számoljuk ki a határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^9+4x^6+1)$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to5+}\dfrac{[6-x]}{2+\{3x\}}$

g) $\lim\limits_{x\to5-}\dfrac{[6-x]}{2+\{3x\}}$ h) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x}$ i)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)$

j)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{4+x}-2}$ k)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ l)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+9x^2+27x+27}$

2. Ábrázoljuk a függvényeket, majd határozzuk meg a határértékeket.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x$ c) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$

3.$^{\text{hf}}$ Helga 1 liter kénsavat szeretne semlegesíteni, ezért 0.1 liter/s sebességgel vizet kever hozzá. Írjuk fel azt a függvényt, amely megmondja, hogy t idő elteltével mekkora az oldatban a kénsav töménysége! Hány másodperc múlva csökken a töménység 1% alá?

4.$^{\text{hf}}$ Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, amely

a) minden pontban folytonos b) semely pontban sem folytonos

c) pontosan egy pontban nem folytonos d) pontosan egy pontban folytonos

5.$^{\text{hf}}$ Definiáljuk a következő fogalmakat:

a) $\lim\limits_{x\to7+}f(x)=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$

6.$^{\text{hf}}$ Igaz? Hamis? „$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=c$ pontosan akkor, ha ahogy x közeledik x_0-hoz, úgy az $f(x)$ függvényértékek egyre közelebb kerülnek c-hez.”

Emlékeztető

– Egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek *a határérétéke x_0-ban a*, (jelölésben $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$), ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta$, hogy $|x-x_0|<\delta$, és $x\neq x_0$ esetén $|f(x)-a|<\varepsilon$.
A függvény féloldali határértékeinek értelmezése:
Baloldali: $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=c$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta>0$, hogy $0<(x_0-x)<\delta$ esetén $|f(x)-c|<\varepsilon$.
Jobboldali: $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=c$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta>0$, hogy $0<(x-x_0)<\delta$ esetén $|f(x)-c|<\varepsilon$.

– $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, ha $\forall K$-hoz $\exists\delta>0$, hogy $0<(x_0-x)<\delta$ esetén $f(x)>K$.

– $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists H$, hogy $x>H$ esetén $|f(x)-c|<\varepsilon$.

– *f folytonos az x_0 pontban*, ha $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. *$f$ folytonos*, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

8. feladatsor: differenciálszámítás

1. Számoljuk ki az $f(x) = (\sin x)(\sin(x-1))^2$ függvény deriváltját az $x_0 = 0$ és $x_0 = 1$ pontokban a definíció alapján!

2. Ha a holdon felfelé elhajítanánk egy követ 24m/s kezdősebességgel, akkor t másodperc múlva $24t - 0.8t^2$ magasan lenne.
   a) Írjuk fel a kő sebességét az idő függvényében.
   b) Mekkora a holdon a gravitációs gyorsulás?
   c) Milyen magasra repül a kő?
   d) Mennyi idő alatt esik vissza?

3. Hol deriválhatóak a következő függvények? Adjuk meg a deriváltakat!

a) x^7	b) $\lvert x\rvert$	c) $1/x^{111}$
d) $x^{-7}\sqrt[5]{x}$	e) $\sin x^3$	f) $\operatorname{ctg} x$
g) $x \sin x$	h) 7^x	i) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^7+2x+1}$
j) $\dfrac{\sin x}{x^3} + e^x \cos x$	k) $\sin^5(x^3)$	l) $\sin(\cos(\sin x))$
m)$^{\text{hf}}$ $\operatorname{sgn} x$	n)$^{\text{hf}}$ $x \sin x \cos x$	o)$^{\text{hf}}$ $\log_3 x$
p)$^{\text{hf}}$ $\log_x x$	q)$^{\text{hf}}$ $(x^3-3x+8)^7$	r)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{1+2x^2}}$
s)$^{\text{hf}}$ $(\sin^3(x)+2)^7$	t)$^{\text{hf}}$ x^x	u)$^{\text{hf}}$ $(\sin x)^{\cos x}$

4. Írjuk fel
   a) az $f(x) = x^3$ függvényt a $(2, 8)$ pontban érintő egyenes egyenletét,
   b)$^{\text{hf}}$ a $g(x) = \ln 3x$ függvényt az $(e^2/3, 2)$ pontban érintő egyenes egyenletét.

5. Milyen α és β mellett deriválható?

   a) $a(x) = \begin{cases} \alpha + \cos x & \text{ha } x > 0 \\ \beta x & \text{különben} \end{cases}$ b)$^{\text{hf}}$ $b(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x) & \text{ha } x > 0 \\ x + \beta & \text{különben} \end{cases}$

6.$^{\text{hf}}$ Mekkora szögben metszi egymást a $\cos x$ és a $\sin x$ függvény?

7.$^{\text{hf}}$ Tudjuk, hogy $(fg)' = f'g + g'f$. Általánosítsuk ezt az összefüggést
   a) háromtényezős, b) négytényesős, c) n tényezős szorzatra.

8.$^{\text{hf}}$ Pista ceruzájának a hegye a $(4, 0)$ pontban van, és innen érintőegyenest szeretne húzni az $f(x) = x^2/3$ függvényhez. Hány fokos szögben kell elindítania a ceruzáját?

Emlékeztető

– Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezve van x_0 egy környezetében, akkor a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ számot (amennyiben létezik és véges) f x_0-beli *deriváltjának* nevezzük, és $f'(x_0)$-val jelöljük.

– Az $x \mapsto f'(x)$ függvényt f *derivált függvényének*, vagy röviden *deriváltjának* nevezzük, és f'-vel jelöljük.

A deriválás alapszabályai

$c' = 0$	
$(cf)' = cf'$	$(cf(x))' = cf'(x)$
$(f+g)' = f' + g'$	$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(fg)' = f'g + g'f$	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$
$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$	$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$
$(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$	$(f^{-1}(y))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Az alapfüggvények deriváltjai

$(x^n)' = nx^{n-1}$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg}x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$	$(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$
$(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$(\mathrm{cth}x)' = \dfrac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$

$$\left(\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \qquad \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}\right)$$

Függvényvizsgálat

az $[a,b]$ intervallumon $f' \geq 0$	$\Rightarrow$	f monoton növekszik $[a,b]$-n
az $[a,b]$ intervallumon $f' \leq 0$	$\Rightarrow$	f monoton csökken $[a,b]$-n
$f'(a) = 0$, és f' előjelet vált a-nál	$\Rightarrow$	f-nek lokális szélsőértéke van a-ban

az $[a,b]$ intervallumon $f'' \geq 0$	$\Rightarrow$	f konvex $[a,b]$-n
az $[a,b]$ intervallumon $f'' \leq 0$	$\Rightarrow$	f konkáv $[a,b]$-n
$f''(a) = 0$, és f'' előjelet vált a-nál	$\Rightarrow$	f-nek a inflexiós pontja

9. feladatsor: L'Hospital-szabály, szélsőérték-keresés

1. Írjuk fel a megadott függvényt az adott P pontban érintő egyenes egyenletét!
   a) $f(x) = x^2, \quad P = (3, 9)$, b)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \sin x, \quad P = (\pi, 0)$.

2. Milyen α, β-ra deriválhatóak a következő függvények?
   a) $\begin{cases} \alpha - \cos x & \text{ha } x > 0 \\ \beta x & \text{különben} \end{cases}$ b)$^{\text{hf}}$ $\begin{cases} \sin x & \text{ha } x > 0 \\ \alpha x + \beta & \text{különben} \end{cases}$ c)$^{\text{hf}}$ $\begin{cases} x^3 + \alpha & \text{ha } x > 1 \\ 2 - \beta x & \text{különben} \end{cases}$

3. Kiszámolandó határértékek:
   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$
   d) $\lim\limits_{x \to 1} (\ln x) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} x$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x + \sin x}$ f)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$
   g)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ h)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{x \cos x}{(2\pi - x)^2}$ i)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \sin x} \right)$
   j)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ k)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x \to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ l)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} \ln x^7$

4. Keressük meg a lokális szélsőértékeit:
   a) $x^3 - 3x^2 - 18x + 5$ b)$^{\text{hf}}$ $x^3 - 6x^2 + 12x + 7$

5. Zsiga pálinkafőzdéje hetente x hordó pálinkát $x^3 - 6x^2 + 15x$ ezer forint költséggel képes előállítani, és y hordót $9y$ ezer forintért tud eladni. Mennyit kell termelnie, hogy maximális legyen a profitja?

6. Keressük meg a függvények adott intervallumon vett szélsőértékeit.
   a) $f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad I = [-3, 1]$ b) $f(x) = |x|, \quad I = (-1, 1)$
   c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \sin x, \quad I = [-1, 2]$ d)$^{\text{hf}}$ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, \quad I = [-1/2, 4)$

7. Írjuk fel a következő függvények n. deriváltát: a) $-\cos x$ b)$^{\text{hf}}$ xe^x

8.$^{\text{hf}}$ Ede akkora téglalap alakú folyóparti telket kap, amekkorát 1000 méternyi drótkerítéssel körül tud keríteni. (A folyópart egy egyenes, a teleknek erre kell illeszkednie. A telek folyóparti oldalára nem kell kerítés.) Milyen alakban kell felépítenie a kerítést, hogy a lehető legnagyobb területű legyen a telke?

9.$^{\text{hf}}$ Hogyan válasszunk két pozitív számot úgy, hogy az összegük 50 legyen, a szorzatuk pedig a lehető legnagyobb?
Hogyan válasszunk két pozitív számot, hogy a szorzatuk 50 legyen, az összegük pedig a lehető legnagyobb?

Emlékeztető

– A *L'Hospital-szabály*: Legyenek az f és g függvények differenciálhatóak az x_0 egy környezetében, és legyen itt $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$. Legyen továbbá $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$. Ha $\dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g'(x)} = A$, akkor $\dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = A$, ahol x_0 és A lehet valós szám vagy $\pm\infty$.

10. feladatsor: szöveges szélsőérték-feladatok

1. Egy téglalap alakú, 1×2 méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

2. Egy épülő atlétikapályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen, és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

3. A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x-szeresére való növelését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x-1)^2$ százaléka nem fog hinni neki, viszont a maradék szavazók $50(x-1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszoros bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?

4. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Maximum mennyi lehet a területe?

5. Egy egyenes körkúp alapkörének a sugara 2 méter, magassága 5 méter. Határozzuk meg a kúpba írható maximális térfogatú henger adatait!

6.[hf] Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)$%-át kéne jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)$%-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kéne az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

7.[hf] Egy egyenlő szárú trapéz két szára és az alapja 1 cm hosszú. Hogyan kell megválasztani a száraknak az alappal bezárt szögét, hogy a területe maximális legyen?

8.[hf] Lenke elhatározta, hogy feltölti a 10000 literes úszómedencéjét, melyhez a vizet a közeli kútról fogja vödörrel hordani. Tetszőlegesen nagy vödröt választhat a munkához, de tudja, hogy ha egy fordulóval l liter vizet hoz, akkor a forduló $64+l^2$ másodpercig fog tartani. Hogyan válassza meg l értékét, hogy a lehető leggyorsabban végezzen?

9.[hf] Roland elhatározza, hogy kifesti a szobáját. Persze ehhez előbb a bútorokat többé-kevésbé össze kell tologatnia, hogy mindenütt hozzáférjen a falhoz. Roland tudja, hogy ha t órát fordít a bútorok összetologatására, akkor a festéssel $10(1+1/t)$ óra alatt végez, viszont a festés után megint t órát vesz igénybe a bútorok eredeti helyzetbe való állítása. Hogyan kell t értékét megválasztania, hogy a lehető leghamarabb legyen kész?

10.[hf] Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0,03 \cdot v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások B forintot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B-t pl. 480 Ft-nak.)

11.[hf] Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége $2,4$ m, illetve $1,6$ m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?

12.[hf] Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalapra illő félkör. Egy-egy ablak adott kerülete K. Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

11. feladatsor: Taylor-polinom, függvényvizsgálat

1. Számoljuk ki a következő Taylor-polinomokat, és írjuk fel a hozzájuk tartozó hibatagot!
   a) $f(x) = (x-2)^{-2}$, középpont: 3, $T_3(x) = ?$
   b) $f(x) = \sin x$, középpont: π, $T_n(x) = ?$
   c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = e^x$, középpont: 0, $T_5(x) = ?$
   d)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \ln \cos x$, középpont: 0, $T_6(x) = ?$

2. ln(1.1)-et szeretnénk közelítőleg kiszámolni a $\ln(1+x)$ függvény 0 közepű Taylor-polinomja segítségével. Hányadik tagig kell elmennünk, hogy a közelítés hibája 10^{-8} alá csökkenjen?

3. Számoljuk ki közelítőleg a megadott számokat egy alkalmas függvény 2., 3., 4. rendű Taylor-polinomját használva eszközül. Becsüljük meg a közelítés hibáját!
   a) $\sqrt[3]{25}$
   b)$^{\text{hf}}$ $\sin 33^o$
   c)$^{\text{hf}}$ e

4. Végezzük el a függvényvizsgálatot, rajzoljuk le a függvényt.

   a) $2x^3 - 3x^2 + 3x + 17$ b) $\dfrac{7}{x} - x$ c) $\dfrac{x}{x^2-1}$ d) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$

   e)$^{\text{hf}}$ x^3e^{-x} f)$^{\text{hf}}$ e^{-x^2} g)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ h)$^{\text{hf}}$ $x + \sin x$

5.$^{\text{hf}}$ Már láttuk, hogy $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, sőt, $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$.
   a) deriváljuk az $\sqrt[x]{x}$ függvényt!
   b) hol veszi fel az $\sqrt[x]{x}$ függvény a maximumát?
   c) ábrázoljuk a $\sqrt[x]{x}$ függvényt!
   d) $\max\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = ?$

6.$^{\text{hf}}$ Keressük meg az $y^2 = x$ parabolának azt a pontját, amely a $(6,0)$ ponthoz a legközelebb van!

Emlékeztető

– Egy n-szer deriválható függvény *a körüli n. rendű Taylor-polinomja*:
$T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. A közelítés *hibatagja:* $R_n(x,\xi) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
Taylor tétele: Ha $f^{(n)}$ differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor létezik egy $\xi \in [a,b]$, hogy $f(b) = T_n(b) + R_n(b,\xi)$.

– *Függvényvizsgálat* alatt azt értjük, hogy a függvény első két deriváltjának az előjelét megvizsgálva megállapítjuk, hogy a függvény hol monoton, hol konvex, hol vannak lokális szélsőértékei, inflexiós pontjai, majd ezek ismeretében lerajzoljuk a függvény grafikonját.

12. feladatsor: primitívfüggvény-keresés

1. Egy csatahajó ágyúja 800m/s kezdősebességgel lövi ki a 1200kg tömegű lövedéket. Az ágyút 45°-os szögben sütik el.
   a) Milyen magasan van a lövedék a röppályája csúcsán?
   b) Mennyi időt tölt a levegőben?
   c) Milyen messzire repül?

2. Keressük meg a primitív függvényeket.

   a) $\displaystyle\int (3x^9 - 2x^2 + 1)\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{4}{7x}\,dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{4}{7x+1}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^8}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{4}{(7x+1)^3}\,dx$

   g) $\displaystyle\int e^{11x}\,dx$ h) $\displaystyle\int xe^{3x^2}\,dx$ i) $\displaystyle\int \cos(111x)\,dx$

3. Integráljunk!

   a) $\displaystyle\int \frac{2x}{5x^2+3}\,dx$ b) $\displaystyle\int e^{9x}(e^{9x}+1)^9\,dx$ c) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$ e) $\displaystyle\int \frac{16x\,dx}{8x^2+2}$ f) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

   g) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ h) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ i) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

   j)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$ k)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ l)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

   m)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx$ n)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ o)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

4.$^{\text{hf}}$ Egy 25 m/s sebességgel haladó autót szeretnénk 10 méteren belül megállítani. Mekkora gyorsulással (azaz lassulással) kell lassítani?

5.$^{\text{hf}}$ Hol a hiba? $\displaystyle \ln|x| = \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{100}{100x}\,dx = 100\int \frac{1}{100x}\,dx = 100\frac{\ln|100x|}{100} = \ln|100x|$

6.$^{\text{hf}}$ A TV képcsövében egy elektron vízszintes irányban, $5\cdot 10^6$ m/s kezdősebességgel indul el a 40 cm távolságra levő képernyő felé. Mennyit esik lefelé, amíg odaér?

Emlékeztető

– Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ha egy $F : I \to \mathbb{R}$ függvényre $F' = f$, akkor F az f *primitív függvénye*. f primitív függvényeinek halmazát $\int f$ jelöli. Szokásos még az $\int f(x)\,dx$ jelölés is, illetve a *határozatlan integrál* elnevezés.

– $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) \qquad \left(\int f = F\right) \qquad\qquad \int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)}$$
$$\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} \qquad (\text{ha } \alpha \neq -1) \qquad\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$$

– A *parciális integrálás*: $\int fg' = fg - \int f'g$.

13. feladatsor: helyettesítéses integrálás, törtfüggvény

1. Alkalmas helyettesítéssel számoljuk ki a következő integrálokat (dolgozatban a helyettesítést mindig megadjuk):

a) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\ dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$ c) $\displaystyle\int \sin x e^{\cos x}\ dx$

d) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos x\ dx$ e)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{2^{\ln x}}{x}\ dx$ f)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$

g)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\, dx$ h)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ i)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{4\, dx}{1+(2x+1)^2}$

j)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$ k)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ l)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

2. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+6x+9} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x^2-4x+10} dx$ e)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$ f)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+x-2} dx$

3.$^{\text{hf}}$ Dömötör a második emeleti ablakából kihajoló matematikaprofesszorát akarja eltalálni egy hógolyóval. A célpont 10m magasan, 20m távolságra van. Dömötör tudja, hogy a légellenállás elhanyagolható.

a) Írjuk fel a **v** kezdősebesség-vektorral elhalyított hógolyó helyét az idő függvényében.
b) Bizonyítsuk be, hogy a hógolyó röppályája parabola.
c) Hogyan kell Dömötörnek **v**-t megválasztania, hogy célba találjon?

Emlékeztető

– A *helyettesítéses integrálás*: $\displaystyle\int f(x)\ dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt|_{t=\varphi^{-1}(x)}$, amennyiben $\varphi'(t) < 0$ vagy $\varphi'(t) > 0$ a kérdéses intervallumon.
(Nem korrekt, ám könnyen megjegyezhető erre így gondolni: $\displaystyle\int f(x)\ dx = \int f(x)\left(\frac{dt}{dt}\right)\ dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}\ dt = \int f(x(t))x'(t)\ dt$. Ekkor valójában egy $x = x(t)$ helyettesítést végzünk. A kapott eredmény t függvénye, azaz vissza kell helyettesíteni t helyébe az $x(t)$ függvény inverzét.)

– $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c} dx$ kiszámolása: Legyen a nevező diszkriminánsa D.
Ha $D = 0$: A nevező teljes négyzet, így $\displaystyle = \int \frac{A}{(x+\frac{b}{2a})} + \frac{B}{(x+\frac{b}{2a})^2} dx = A\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right| - \frac{B}{x+\frac{b}{2a}}$.
Ha $D > 0$: Parciális törtekre kell bontani: $\displaystyle = \int \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} dx = A\ln|x+a| + B\ln|x+b|$.
Ha $D < 0$: $\displaystyle = A\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + B\int \frac{1}{f(x)} dx = A\ln|f(x)| + B\,\mathrm{arctg}(\ldots)$.

14. feladatsor: Riemann-integrál

1. Egy 2 méter hosszú vályú keresztmetszetét az $f(x) = 15x^2,\ x \in [-0.1,\ 0.1]$ függvény írja le.
   a) Mennyi víz fér a vályúba?
   b) Ha 10 liter vizet öntünk bele, milyen magas lesz a vízszint?

2. Mekkora az f és g függvények grafikonja által közrefogott síkidom területe, ha
   a) $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$
   b)$^{\text{hf}}$ $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^3$
   c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = x^2$ és $g(x) = -x^2 + 2$

3. Számoljuk ki az integrálokat!

a) $\displaystyle\int_0^2 |1 - x|\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{5.5} [x]\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\, dx$

f)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_{-3}^3 \{x\}\, dx$

g)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_0^{10\pi} (1 - \cos 3x)\sin 3x\, dx$

h)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx$

i)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

4.$^{\text{hf}}$ Mekkora területet vág ki az $x^2 + y^2 \le 8$ körlapból az $y^2 = 2x$ parabola?

Emlékeztető

– A *Newton-Leibniz-szabály*: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható, és F egy primitív függvénye, akkor
$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

– Helyettesítés határozott integrálra: Ha g szigorúan monoton növekvő vagy csökkenő, akkor
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))g'(y)\, dy.$$ (Ha a képletben minden integrál létezik.)