Matematika A1

2. és 3. gyakorlatok

Térvektorok

Alapműveletek

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges a(z)
   (a) x-tengelyre és azt a $(3,0,0)$ pontban metszi, megoldás: $x = 3$
   (b) z-tengelyre és azt a $(0,0,2)$ pontban metszi. megoldás: $z = 2$

2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(3,-1,2)$ ponton és párhuzamos a(z)
   (a) x-tengellyel, megoldás: $x = t$, $y = -1$, $z = 2$
   (b) y-tengellyel, megoldás: $x = 3$, $y = t$, $z = 2$

3. Legyen $\mathbf{u} = (3,-2,1)$ és $\mathbf{v} = (-2,5,0)$. Határozzuk meg a megadott vektorok komponenseit és nagyságát (hosszát)!
   (a) $3\mathbf{u}$ megoldás: $(\frac{9}{2}, -3, \frac{3}{2})$, $|3\mathbf{u}| = 3\sqrt{29}$
   (b) $\frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{4}{5}\mathbf{v}$ megoldás: $(\frac{1}{5}, \frac{14}{5}, \frac{3}{5})$, $|\frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{4}{5}\mathbf{v}| = \frac{\sqrt{206}}{5}$

4. Keressük meg a $\vec{P_1P_2}$ irányvektorát, és a P_1P_2 szakasz felezőpontját!
   (a) $P_1(-1,1,5)$ $P_2(2,5,0)$ megoldás: $\vec{P_1P_2} = (3,4,-5)$, $\mathbf{f} = (\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2})$
   (b) $P_1(3,4,5)$ $P_2(2,3,4)$ megoldás: $\vec{P_1P_2} = (-1,-1,-1)$, $\mathbf{f} = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2})$

Skalárszorzat

5. Határozzuk meg az $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ értékeit; $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szögének koszinuszát; $\mathbf{u}$-nak a $\mathbf{v}$ irányú skaláris komponensét.
   (a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$ megoldás: $\mathbf{uv} = -25$, $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 5$, $\cos\gamma = -1$, $|\mathbf{u}|\cos\gamma = -5$
   (b) $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ megoldás: $\mathbf{uv} = 25$, $|\mathbf{u}| = 15$, $|\mathbf{v}| = 5$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$, $|\mathbf{u}|\cos\gamma = 5$

6. **A rombusz átlói:** Mutassuk meg, hogy a rombusz (egyenlő oldalú paralelgramma) átlói merőlegesek egymásra!

7. **Vektorra merőleges egyenes:** Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vektor merőleges az $ax + by = c$ egyenesre. Gondoljunk arra, hogy v meredeksége negatív reciproka az egyenes meredekségének.

Vektorszorzat

8. Számítsuk ki az $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ és a $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ vektor hosszát és adjuk meg irányát is (amennyiben értelmezve van)!

   (a) $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ megoldás: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$, $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$

   (b) $\mathbf{u}=2\mathbf{i}$, $\mathbf{v}=-3\mathbf{j}$ megoldás: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-6\mathbf{k}$, $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=6\mathbf{k}$

9. Számítsuk ki a P,Q,R pontok által meghatározott háromszögnek a területét, majd adjunk meg egy PQR síkra merleges egységvektort!

   (a) $P(1,1,1)$, $Q(2,1,3)$, $R(3,-1,1)$. megoldás: $ter=3$, $\mathbf{n}=(4,-4,2)$

   (b) $P(2,-2,1)$, $Q(3,-1,2)$, $R(3,-1,1)$. megoldás: $ter=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathbf{n}=(-1,1,0)$

Vegyesszorzat

10. Ellenőrizzük az $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})=(\mathbf{v}\times\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})$ azonosságot, majd számítsuk ki a $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelopipedon térfogatát!

    (a) $\mathbf{u}=2\mathbf{i}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{j}$, $\mathbf{w}=2\mathbf{k}$ megoldás: $V=8$

    (b) $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{w}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ megoldás: $V=4$

11. Mi az, ami az alábbiak közül mindig igaz, és mi az, ami nem mindig? Indokoljunk is!

    (a) $|\mathbf{u}|=\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$ megoldás: igaz

    (b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|$ megoldás: igaz

    (c) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}$ megoldás: hamis

    (d) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ megoldás: igaz

12. Adott $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok skaláris vagy vektoriális szorzataként írjuk fel a következőket:

    (a) $\mathbf{u}$ merőleges vetítése $\mathbf{v}$-re; megoldás: $\frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$

    (b) egy $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{v}$-re ortogonális vektor; megoldás: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

    (c) az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata. megoldás: $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\mathbf{w}|$

Térgeometria

13. Írjuk fel az egyenesek paraméteres egyenletrendszerét!

    (a) A $P(3,-4,-2)$ ponton átmenő, az $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektorral párhuzamos egyenes. megoldás: $x=3+t$, $y=-4+t$, $z=-2+t$

    (b) A $P(-2,0,3)$ és $Q(3,5,-2)$ pontokon átmenő egyenes. megoldás: $x=-2+5t$, $y=5t$, $z=3-5t$

    (c) A $(0,-7,0)$ ponton átmenő, az $x+2y+2z=13$ síkra merőleges egyenes. megoldás: $x=t$, $y=-7+2t$, $z=2t$

14. Írjuk fel az $(1,1,-1)$, $(2,0,2)$, $(0,-2,1)$ pontokon átfektetett sík egyenletét. megoldás: $7x-5y-4z=6$

15. Keressük meg az $x=2t+1, y=3t+2, z=4t+3$, valamint az $x=s+2, y=2s+4, z=-4s-1$ egyenesek metszéspontját, majd írjuk fel az egyenesek által meghatározott sík egyenesét! megoldás: $M(1,2,3)$, $-20x+12y+z=7$

16. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0(2,1,-1)$ ponton és merőleges a $2x+y-z=3$, $x+2y+z=2$ síkok metszésvonalára. megoldás: $x-y+z=0$

17. Határozzuk meg a $2x - y + z = 5$ és $3x + y - 2z = 3$ sikok metszeteként előálló egyenes egyenletét! megoldás: $x = t$, $y = -13 + 7t$, $z = -8 + 5t$

18. Határozzuk meg a $(0, 0, 12)$ pont és az $x = 4t$, $y = -t$, $z = 2t$ egyenes távolságát! megoldás: $12\sqrt{\frac{17}{21}}$

19. Határozzuk meg a $(0, -1, 0)$ pont és a $2x + y + 2z = 4$ sík távolságát! megoldás: $\frac{5}{3}$

20. Határozzuk meg az $x = 2t + 1, y = 3t + 2, z = 4t + 3$ és $x = 1 - s, y = 3 + s, z = 2 + 2s$ egyenesek távolságát! megoldás: $\frac{13}{\sqrt{93}}$

21. Határozzuk meg az $x + y = 1$ és a $2x + y - 2z = 2$ síkok szögét! megoldás: $\frac{\pi}{4}$

22. Határozzuk meg az egyenes és a sík döféspontját!
    (a) $x = 1 - t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$; $2x - y + 3z = 6$ megoldás: $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
    (b) $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 5t$, $z = 3t$; $x + y + z = 2$ megoldás: $(1, 1, 0)$

23. Párhuzamos-e a az $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3t$ egyenes a $2x + y - z = 8$ síkkal? Indokoljuk a választ! megoldás: nem

24. Az a, b, c nemnulla számokkal $(x/a)+(y/b)+(z/c) = 1$ grafikonja egy sík. Mely síkoknak ilyen alakú az egyenletük? megoldás: nem megy át az origón és nem merőleges egy koordinátasíkra sem