

# Az egyenes és a sík analitikus geometriája

## Az egyenes a kétdimenziós koordinátarendszerben

A kétdimenziós koordinátarendszerben az egyenest egy  $\mathbf{n}(A, B)$  normálvektorával és egy  $\mathbf{r}_0$  helyvektorú  $P(x_0, y_0)$  pontjával cálszerű megadni. Ebben az esetben az egyenes egyenlete  $Ax + By = Ax_0 + By_0$  alakú, és fordítva: minden  $Ax + By = C$  egyenlet, ahol  $A^2 + B^2 \neq 0$ , egy egyenes egyenlete.

Az egyenes egyenletének *Hesse-féle normálalakja (normálegyenlete)*:

$$\frac{Ax + By - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

egy  $P(x_0, y_0)$  pontnak az egyenestől mért távolsága:

$$\left| \frac{Ax_0 + By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Két egyenes párhuzamosságának, illetve merőlegességének feltétele normálvektoraik párhuzamosság, illetve merőlegessége. Két egyenes *hajlásszöge* normálvektoraik szögével (ha az nem tompaszög), illetve kiegészítőszögével (tompaszög esetén) egyenlő.

## Feladatok

- 1) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek normálvektora  $\mathbf{n}(-4, 2)$ , és átmegy a  $P(7, 2)$  ponton.
- 2) Számítsuk ki a következő egyenesek hajlásszögét:

|                       |                    |
|-----------------------|--------------------|
| a) $5x - y + 7 = 0,$  | $3x + 2y = 0;$     |
| b) $3x - 2y + 7 = 0,$ | $2x + 3y - 3 = 0;$ |
| c) $x - 2y - 4 = 0,$  | $2x - 4y + 3 = 0;$ |
| d) $3x + 2y - 1 = 0,$ | $5x - 2y + 3 = 0.$ |

- 3) Döntsük el, hogy az alábbi egyenletek normálegyenletek-e:

|                 |   |   |
|-----------------|---|---|
| a) $x + 2 = 0;$ | b) $\frac{2x}{5} - \frac{3y}{5} - 1 = 0;$ | c) $-\frac{5x}{13} + \frac{12y}{13} + 2 = 0.$ |
|-----------------|---|---|

4) Számítsuk ki a  $P$  pont és az  $e$  egyenes távolságát:

- a)  $P(-4,7)$   $e : 3x - 4y = 5;$   
b)  $P(11,9)$   $e : 5x + 12y = 26;$   
c)  $P(0,0)$   $e : 7x - 3y = 12.$

5) Számítsuk ki az alábbi párhuzamos egyenespárok távolságát:

- a)  $3x - 4y - 10 = 0,$   $6x - 8y + 5 = 0;$  b)  $24x - 10y + 39 = 0,$   $12x - 5y - 26 = 0.$

6) Mekkora távolságra van a  $15x - 8y - 34 = 0$  egyenes az origótól?

7) Mekkora a  $20x + 21y - 29 = 0$  és a  $20x + 21 - 58 = 0$  egyenesek távolsága?

8) Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenleteit, amelyek párhuzamosak a  $15x - 8y - 34 = 0$  egyenessel és tőle 6 egységnyi távolságra vannak.

9) Adjuk meg az alábbi egyenespárok szögfelezőinek egyenletét:

- a)  $x - 2y - 3 = 0,$   $2x + 4y + 7 = 0;$  b)  $x - 3y + 5 = 0,$   $3x - y - 2 = 0;$  c)  $3x + 4y - 1 = 0,$   $5x + 12y - 2 = 0.$

## Egyenes és sík a térben

◇ Az egyenes paraméteres egyenlete:

$$\begin{cases} X = u_1\lambda + x_0 \\ Y = u_2\lambda + y_0 \\ Z = u_3\lambda + z_0 \end{cases},$$

ahol a  $\lambda$  egy valós paraméter. Az  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  az egyenes irányvektora és  $P(x_0, y_0, z_0)$  egy pont az egyenesről. Az  $\vec{u}$  vektor nem a nullvektor.

◇ Az egyenes egyenlete:

$$\frac{X - x_0}{u_1} = \frac{Y - y_0}{u_2} = \frac{Z - z_0}{u_3}.$$

◇ A  $P(x_1, y_1, z_1)$  és a  $Q(x_2, y_2, z_2)$  pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$\frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

◇ A sík egyenlete:

$$aX + bY + cZ + d = 0,$$

ahol  $a, b, c, d$  együtthatók és  $X, Y, Z$  ismeretlenek. Az  $\vec{n} = (a, b, c)$  vektor a sík normálvektora és  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ .

◇ A  $P(x_0, y_0, z_0)$  pont távolsága a  $aX + bY + cZ + d = 0$  síktól:

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

◇ A síkok különböző megadásai:

- A  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  irányra merőleges és a  $P(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő sík egyenlete:

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

- Az  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  és  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  ( $\vec{u}$  és  $\vec{v}$  lineárisan függetlenek) irányokkal párhuzamos és a  $P(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő sík egyenlete:

$$w_1(X - x_0) + w_2(Y - y_0) + w_3(Z - z_0) = 0,$$

ahol  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = \vec{u} \times \vec{v}$ .

- A  $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$  és  $R(x_3, y_3, z_3)$  nem kollineáris pontokon átmenő sík egyenlete:

$$w_1(X - x_1) + w_2(Y - y_1) + w_3(Z - z_1) = 0,$$

ahol  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \times (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3)$ .

◇ Az  $\frac{X - x_0}{u_1} = \frac{Y - y_0}{u_2} = \frac{Z - z_0}{u_3}$  egyenes és az  $aX + bY + cZ + d = 0$  síkok párhuzamosak, pontosan akkor ha az  $(u_1, u_2, u_3)$  és  $(a, b, c)$  vektorok merőleges egymásra, azaz  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ . Ha a fenti egyenes és sík nem párhuzamosak, akkor metszik egymást és a metszéspontjuk:

$$\begin{cases} X_0 = u_1\lambda_0 + x_0 \\ Y_0 = u_2\lambda_0 + y_0 \\ Z_0 = u_3\lambda_0 + z_0 \end{cases},$$

ahol

$$\lambda_0 = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{au_1 + bu_2 + cu_3}.$$

- ◇ Két egyenes párhuzamos pontosan akkor, ha az irányvektoraik párhuzamosak, azaz az irányvektorok lineárisan függőek. Két egyenes merőleges egymásra pontosan akkor, ha az irányvektoraik merőlegesek egymásra, azaz az irányvektoraik skalárszorzata nulla. Két sík párhuzamos pontosan akkor, ha a normálvektoraik párhuzamosak, illetve két sík merőleges egymásra pontosan akkor, ha a normálvektoraik merőlegesek egymásra.
- ◇ Tegyük fel, hogy az  $aX + bY + cZ + d = 0$  és a  $a'X + b'Y + c'Z + d' = 0$  síkok nem párhuzamosak és legyen  $(x_0, y_0, z_0)$  a

$$\begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z + d' = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek egy megoldása. Ha  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ -mal jelöljük az  $(a, b, c) \times (a', b', c')$  vektori szorzatot, akkor a fenti síkok metszete az

$$\frac{X - x_0}{u_1} = \frac{Y - y_0}{u_2} = \frac{Z - z_0}{u_3}$$

egyenes.

### Feladatok

- 10) Írjuk fel a  $P$  ponton átmenő  $\vec{v}$  irányvektorú egyenes egyenletrendszerét:

- |                    |                       |
|--------------------|-----------------------|
| a) $P(-1, 3, 7),$  | $\vec{v}(-4, 2, 6);$  |
| b) $P(0, -1, 2),$  | $\vec{v}(1, 7, -9);$  |
| c) $P(9, 8, -3),$  | $\vec{v}(6, 0, 2);$   |
| d) $P(-11, 9, 1),$ | $\vec{v}(12, 8, -4).$ |

- 11) Egy egyenes egyenletrendszeréből hogyan lehet azonnal leolvasni, hogy az egyenes párhuzamos az  $yz$  koordinátságokkal?

- 12) Döntsük el, rajta van-e a  $P(-3, 2, 5)$  pont az alábbi egyeneseken:

- a)  $\frac{x - 6}{2} = \frac{y - 20}{4} = z - 9, 5;$   
 b)  $x = 15 - 2t, \quad y = -43 + 5t, \quad z = -22 + 3t.$

- 13) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely

- a) átmegy a  $P_0(3, -1, 5)$  ponton és párhuzamos az  $y$  tengellyel;

b) átmegy az origón és a koordinátatengelyek pozitív irányával egyenlő szöget zár be.

14) Írjuk fel a koordinátatengelyek egyenletét.

15) Írjuk fel egy olyan egyenes egyenletrendszerét, amely átmegy a  $Q(-3,7,5)$  ponton és párhuzamos az  $xy$  síkkal.

16) Írjuk fel a következő pontpárok összekötő egyenesének egyenletrendszerét:

- |    |              |               |
|----|--------------|---------------|
| a) | $P(-2,5,6),$ | $Q(7,-1,3);$  |
| b) | $P(5,1,2),$  | $Q(-5,1,3);$  |
| c) | $P(0,0,0),$  | $Q(9,11,-1);$ |
| d) | $P(1,1,-2),$ | $Q(3,-1,0).$  |

17) Döntsük el, hogy az alábbi egyenletrendszerek közül melyek adják meg ugyanazt az egyenest:

◇

$$\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -7 + 2t \\ z = 2 - z \end{cases}$$

◇

$$\frac{x+7}{-6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-12}$$

◇

$$\begin{cases} x = 14 + 9t \\ y = -13 - 6t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$$

18) Egy háromszög csúcsainak koordinátái:  $A(3,6,-7)$ ,  $B(-5,2,3)$ ,  $C(4,-7,-2)$ . Írjuk fel a  $C$  csúcson átmenő súlyvonal egyenletrendszerét!

19) Adjuk meg a  $P(-6,6,-5)$  és  $Q(12,6,-1)$  pontok összekötő egyenesének a koordinátasíkokkal való metszéspontját!

20) Tükrözzük az

$$\begin{cases} x = 7 - 8t \\ y = -4 + 6t \\ z = 9t \end{cases}$$

egyenes a  $C(-4,6,1)$  pontra! Mi a tükörkép egyenletrendszere?

21) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenesek párhuzamosak egy síkkal!

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{7}$$

$$\frac{x+8}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z+9}{-3}$$

22) Metszi-e az

$$\begin{cases} x = -14 - 7t \\ y = 4 + 2t \\ z = 8 + 5t \end{cases}$$

egyenes a  $z$  tengelyt?

23) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+9}{7}$$

egyenessel, és átmegy a  $(3, -1, -2)$  ponton!

24) Írjuk fel az

$$\frac{x+9}{-5} = \frac{y+2}{3} = z - 4$$

$$x - 3 = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{-3}$$

metsző egyenesek szögfelezőinek egyenletrendszerét!

25) Egy háromszög csúcsai:  $A(3, -1, -1)$ ,  $B(1, 2, -7)$ ,  $C(-5, 14, -3)$ . Írjuk fel a  $B$  ponton átmenő belső szögfelező egyenletrendszerét!

26) Vizsgáljuk meg az alábbi egyenespárok kölcsönös helyzetét! Ha metszők, számítsuk ki a metszéspont koordinátáit is!

$$\diamond \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = z \text{ és } \begin{cases} x = 5+6t \\ y = -4t \\ z = 7+2t \end{cases}$$

$$\diamond \begin{cases} x = 2t \\ y = 13+5t \\ z = -13-7t \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = -2+2t \\ y = 2-t \\ z = 4+3t \end{cases}$$

$$\diamond \begin{cases} x = t \\ y = -1+2t \\ z = 1+tt \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = 5+2t \\ y = -t \\ z = 3-2t \end{cases}$$

$$\diamond x-3 = \frac{y-8}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ és } x-4 = \frac{y-9}{2} = \frac{z-9}{5}$$

27) Adjuk meg az  $a$  értékét úgy, hogy a következő két egyenes metsző legyen:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$$

$$\frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

28) Mutassuk meg a metszéspont kiszámítása nélkül, hogy az

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = 3+2t \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 7-3t \\ z = 4-t \end{cases}$$

egyenesek metszők!

29) Döntsük el, milyen a következő két egyenes kölcsönös helyzete:

$$\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -2+3t \\ z = 6-4t \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = 5+t \\ y = -1-4t \\ z = -4+t \end{cases} !$$

30) Adjuk meg az

$$\begin{cases} x = 4+8t \\ y = -8t \\ z = 6-14t \end{cases}$$

egyenesnek azokat a pontjait, amelyek az  $A(8, -4, -1)$  pontjától 27 egységnyi távolságra vannak!

31) Számítsuk ki az alábbi egyenesek hajlásszögét:

$$\diamond x - 3 = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ és } x + 2 = y - 3 = \frac{z + 5}{\sqrt{2}}$$

$$\diamond \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -3 + t \end{cases}$$

$$\diamond \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = 17 + 2t \\ y = 3t \\ z = 9 + 17t \end{cases}$$

$$\diamond \frac{x - 1}{3} = \frac{y}{2,5} = \frac{z + 1}{-3} \text{ és } \begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \\ z = -5 \end{cases}$$

$$\diamond \frac{x + 5}{3} = y - 5 = z \text{ és } \frac{x - 5}{4} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z + 1}{5}$$

- 32) Írjuk fel az  $M(4, -4, 16)$  pontból az  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$  egyenletrendszerű egyenesre állított merőleges egyenletrendszerét!

- 33) Írjuk fel a  $P(2, 1, -3)$  pontból az  $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = t \end{cases}$  egyenesre állított merőleges egyenletrendszerét!

- 34) Egy háromszög csúcsai:  $A(1, -2, -4)$ ,  $B(5, 1, -7)$ ,  $C(3, 1, -3)$ . Írjuk fel a  $C$ -n átmenő magasságvonal egyenletrendszerét!

- 35) Számítsuk ki a  $P(2, 4, -6)$  pontnak az  $\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 1}{9} = \frac{z}{2}$  egyestől mért távolságát!

- 36) Számítsuk ki az alábbi párhuzamos egyenesek távolságát:

$$\diamond \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 2t \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\diamond \frac{x - 2}{3} = y = \frac{z - 1}{3} \text{ és } \frac{x + 2}{3} = y + 1 = \frac{z + 4}{3}$$

- 37) Tükrözzük a  $P(-1, 2, 3)$  pontot az  $\frac{x + 1}{3} = y = z$  egyenesre! Számítsuk ki a tükörkép koordinátáit!



38) Adjuk meg az alábbi egyenesek az  $xy$  síkon lévő vetületének az egyenletrendszerét:

$$\diamond \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{7}$$

$$\diamond \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 9t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

39) Egy egyenes  $xy$  síkon lévő merőleges vetületének egyenlete  $x - 2y = 15$ ; az  $yz$  síkon pedig  $3y - z = 10$ . Adjuk meg az egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

40) Mekkora az  $\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{9}$  egyenes távolsága a  $z$  tengelytől?

41) Számítsuk ki az alábbi egyenespárok távolságát:

$$\diamond \begin{cases} x = 8 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4t \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\diamond \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3} \text{ és } \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+3}{3}$$

$$\diamond \frac{x+2}{3} = \frac{y}{0,5} = \frac{z+3}{4} \text{ és } x = y = 3z$$

$$\diamond \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1} \text{ és } x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$$

42) Írjuk fel az  $\frac{x-3}{4} = \frac{y+6}{8} = \frac{z-9}{7}$  és az  $x+1 = \frac{y-18}{-2} = z$  egyenesek  $z$  tengellyel párhuzamos transzverzálisának az egyenletrendszerét!

43) Adottak az  $\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = -3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$  és az  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \\ z = 9 - t \end{cases}$  egyenesek. Határozzuk meg a két egyenes  $\mathbf{c}(-11, -11, 2)$  vektorral párhuzamos transzverzálisát!

44) Írjuk fel az  $\begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$  és az  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -12 - t \end{cases}$  egyenesek normáltranszverzálisának egyenletrendszerét! Számítsuk ki a két kitérő egyenes távolságát!

45) Írjuk fel az alábbi egyenesek normáltranszverzálisának egyenletrendszerét:

$$\frac{x-9}{6} = \frac{y-7}{3} = \frac{z}{-5}$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-13}{-12} = \frac{z+9}{11}$$

- 46) Írjuk fel a  $P(6,4,3)$  ponton átmenő és az  $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = -1+2t \end{cases}$  egyenest  $45^\circ$  o-os szögben metsző egyenes egyenletét!

- 47) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy az  $A(-1,2,-3)$  ponton, merőleges a  $\mathbf{d}(6,-2,-3)$  vektorra és metszi az  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$  egyenest!

- 48) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a  $Q(-1,2-0)$  ponton, és merőleges az  $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 5+t \\ z = 3 \end{cases}$  és az  $\begin{cases} x = 8+t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}$  egyenesekre!

- 49) Adott a sík  $\mathbf{n}$  normálvektora és  $P$  pontja. Írjuk fel a sík egyenletét:

- a)  $\mathbf{n}(-3,2,11), P(9,1,0)$
- b)  $\mathbf{n}(9,1,7), P(1,1,-3)$
- c)  $\mathbf{n}(1,0,1), P(2,7,5)$
- d)  $\mathbf{n}(-2,9,9), P(0,0,0)$
- e)  $\mathbf{n}(0,0,1), P(9,13,-7)$

- 50) Írjuk fel a koordinátasíkok egyenletét!

- 51) Írjuk fel az  $xz$  síkkal párhuzamos, attól 8 egységnyi távolságra lévő sík egyenletét!

- 52) Hogyan mutatkozik az a sík egyenletében, hogy a sík merőleges valamely koordinátasíkra?

- 53) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az  $xy$  koordinátasíkra, és azt az  $ax+by=c$  egyenletű egyenesben metszi!

- 54) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a  $P(-3,2,5)$  ponton, és tartalmazza a  $z$  tengelyt!

- 55) Az origóból egy síkra állított merőleges talppontja a  $P(-4,5,2)$  pont. Írjuk fel a sík egyenletét!
- 56) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a  $Q(3,4,-5)$  ponton, és párhuzamos az  $\mathbf{a}(3,1,-1)$  és  $\mathbf{b}(1,-2,1)$  vektorokkal!
- 57) Írjuk fel az  $A(2,-1,3)$ ,  $B(3,1,2)$  pontokon átmenő és az  $\mathbf{a}(3,-1,4)$  vektorral párhuzamos sík egyenletét!
- 58) Írjuk fel az  $A(3,-1,2)$ ,  $B(4,-1,-1)$ ,  $C(2,0,2)$  pontok síkjának egyenletét!
- 59) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az origón, és tartalmazza az  $\frac{x-3}{2} = y+7 = z$  egyenest!
- 60) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tengelyeket rendre a 4, -3, 2 pontokban metszi!
- 61) Mekkora térfogatú derékszögű tetraédert metsz ki a  $4x + 6y + 8z = 24$  egyenletű sík a koordinátságokból?
- 62) Válasszuk ki az alábbi síkpárok közül a párhuzamosokat:
- a)  $2x - 3y + 5z - 7 = 0$  és  $2x - 3y + 5z + 3 = 0$
- b)  $4x + 2y - 4z + 5 = 0$  és  $2x + y + 2z - 1 = 0$
- c)  $x - 3z + 2 = 0$  és  $2x - 6z - 7 = 0$
- 63) a) Írjuk fel az origón átmenő és a  $2x - 8y + 6z = 17$  síkkal párhuzamos sík egyenletét!
- b) Írjuk fel az  $M(-4,3,8)$  ponton átmenő és a  $9x + 6y - 4z = 3$  síkkal párhuzamos sík egyenletét!
- 64) Írjuk fel az  $AB$  szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét, ahol  $A(-3,7,6)$  és  $B(1,-5,0)$ !
- 65) Írjuk fel a  $P(-2,0,3)$  ponton átmenő, és az  $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z-3}{5}$  egyenesre merőleges sík egyenletét!
- 66) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos az  $x$  tengellyel, és átmegy a  $P(0,1,3)$  és a  $Q(2,4,5)$  pontokon!

- 67) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az  $R(-1,5,7)$  ponton, és párhuzamos az  $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  és az  $\begin{cases} x = 7 + 9t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$  egyenesekkel!
- 68) Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenleteit, amelyekben a  $3x + 17y + 8z = 2$  sík a koordinátasíkokat metszi!
- 69) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az  $x - 2y + 5z - 3 = 0$  síkra, párhuzamos az  $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{4}$  egyenessel és átmegy a  $P(-3,2,1)$  ponton!
- 70) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az  $A(1, -1, 2)$  és a  $B(3,1,1)$  pontokon, és merőleges az  $x - 2y + 3z - 5 = 0$  síkra!
- 71) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az origón, és merőleges a  $2x - y + 3z - 1 = 0$  és  $x + 2y + z = 0$  síkokra!
- 72) Írjuk fel az  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}$  és  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$  párhuzamos síkjának egyenletét!
- 73) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a  $Q(1,2, -3)$  ponton, és párhuzamos  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$  és  $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$  egyenesekkel!
- 74) Mutassuk meg, hogy  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$  és  $\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$  metsző egyenesek, és írjuk fel síkjuk egyenletét!
- 75) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$  és  $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$  egyenesekkel párhuzamos és tőlük egyenlő távolságra van!
- 76) Számítsuk ki a következő síkpárok hajlásszögét:
- a)  $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ ,  $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$
- b)  $3y - z = 0$ ,  $2y + z = 0$
- 77) Számítsuk ki a  $6x - y + 18z = 19$  sík távolságát a  $P(4, -3, 2)$  ponttól!
- 78) Számítsuk ki a  $P(-1,1, -2)$  pont távolságát az  $A(1, -1, 1)$ ,  $B(-2,1,3)$ ,  $C(4, -5, -2)$  pontok síkjától!

- 79) Határozzuk meg az  $y$  tengelynek azt a pontját, amely az  $x + 2y - 2z - 2 = 0$  síktól 4 egységnyi távolságra van!
- 80) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely egyenlő távol van a  $2x - 9y + 5z = 6$  síktól, valamint a  $C(5, -8, 7)$  ponttól!
- 81) Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely a  $3x + 2y - z + 3 = 0$  és a  $3x + 2y - z - 1 = 0$  párhuzamos síkaktól egyenlő távolságra van!
- 82) Számítsuk ki az alábbi síkpárok távolságait:
- a)  $x - 2y - 2z - 12 = 0$  és  $x - 2y - 2z - 6 = 0$
- b)  $2x - 3y + 6z - 14 = 0$  és  $4x - 6y + 12z + 21 = 0$
- 83) Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenleteit, amelyek a  $4x - 4y - 2z + 3 = 0$  síktól 2 egységnyi távolságra vannak!
- 84) Számítsuk ki az adott egyenes és sík metszéspontjainak koordinátáit:
- $$e : x - 1 = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6}$$
- $$S : 2x + 3y + z - 1 = 0$$
- 85) Az  $m$  paraméter milyen értékére lesz párhuzamos az  $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{m} = \frac{z + 3}{-2}$  egyenes az  $x - 3y + 6z + 7 = 0$  síkkal?
- 86) Adjuk meg az alábbi síkpárok metszésvonalainak egyenletrendszerét:
- a)  $x - 2y + 3z - 4 = 0$  és  $3x + 2y - 5z - 4 = 0$
- b)  $x - 2y + 3z + 1 = 0$  és  $2x + y - 4z - 8 = 0$
- 87) Bizonyítsuk be, hogy az  $x - 2y + z - 7 = 0$ ,  $3x + y - z + 2 = 0$  és  $x - 3y + 2z - 11 = 0$  síkoknak egy közös pontja van! Számítsuk ki ennek a pontnak a koordinátáit!
- 88) Hogyan kell megválasztanunk az  $a$  és  $b$  értékét, hogy a  $2x - y + 3z - 1 = 0$ ,  $x + 2y - z + b = 0$ ,  $x + ax - 6z + 10 = 0$  síkoknak
- a) egy közös pontja legyen,
- b) egy egyenesre illeszkedjenek,
- c) három párhuzamos egyenesben messék egymást?

89) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a  $P(-2,1,3)$  ponton és az  $x - y + 3z - 8 = 0$ ,  $2x + y - z + 2 = 0$  síkok metszésvonalán!

90) Számítsuk ki az alábbi sík-egyenes pár hajlásszögét:

$$S : x + 9y + 4z + 7 = 0$$

$$e : \frac{x+3}{4} = y-6 = \frac{z}{9}$$

91) Az  $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$  egyenesnek mely pontja van egyenlő távol az  $A(2, -4, 7)$  és  $B(0, -6, 5)$  pontoktól?

92) Adjuk meg a  $P(5, 2, -1)$  pont vetületét a  $2x - y + 3z - 23 = 0$  síkon!

93) Mik a  $P(1, 3, -4)$  pont  $3x + y - 2z = 0$  síkra vonatkozó tükörképének koordinátái?

94) Adjuk meg a  $P(-6, 4, -5)$  és  $Q(10, -5, 2)$  pontokon átmenő egyenes metszéspontjait a koordinátságokkal.

95) Tükrözzük az  $x = 4 - 2t$ ,  $y = 5 + 3t$ ,  $z = 3 - t$  egyenest a  $C(2, -1, 7)$  pontra. Mi a tükörkép egyenletrendszere?

96) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenesek párhuzamosak egy síkkal:

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}, \quad \frac{x}{5} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{7}, \quad \frac{x+8}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z+9}{-3}.$$

97) Vizsgáljuk meg az alábbi egyenespárok kölcsönös helyzetét (párhuzamosság, metszés, merőlegesség, kitérés):

a)  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$  és  $x = 5 + 6t$ ,  $y = -4t$ ,  $z = 7 + 2t$ ;

b)  $x = 2t$ ,  $y = 13 + 5t$ ,  $z = -13 - 7t$  és  $x = -2 + 2t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = 4 + 3t$ ;

c)  $x = t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 1 + t$  és  $x = 5 + 2t$ ,  $y = -t$ ,  $z = 3 - 2t$ ;

d)  $x - 3 = \frac{y-8}{3} = \frac{z-3}{4}$  és  $x - 4 = \frac{y-9}{2} = \frac{z-9}{5}$ .

98) Írjuk fel az  $\frac{x+9}{-5} = \frac{y+2}{3} = z-4$  és  $x-3 = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{-3}$  metsző egyenesek szögfelezőinek az egyenletrendszerét.

- 99) Adjuk meg az  $m$  paraméter értékét úgy, hogy a  $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$  és  $\frac{x-3}{m} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$  egyenesek merőlegesek legyenek egymásra.
- 100) Mutassuk meg a metszéspont kiszámítása nélkül, hogy az  $x = 1 + t$ ,  $y = 4 - t$ ,  $z = 3 + 2t$  és  $x = -1 + 2t$ ,  $y = 7 - 3t$ ,  $z = 4 - t$  egyenesek metszők.
- 101) Írjuk fel az  $M(4, -4, 16)$  pontból az  $x = 2 + t$ ,  $y = 4 + 4t$ ,  $z = 4 + t$  egyenletrendszerű egyenesre állított merőleges egyenletrendszerét.
- 102) Az  $A(1, -2, 4)$ ,  $B(5, 1, -7)$ ,  $C(3, 1, -3)$  egy háromszög csúcsai. Írjuk fel a  $C$ -n átmenő magasságvonal egyenletrendszerét.
- 103) Számítsuk ki a  $P(2, 4, -6)$  pontnak az  $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{2}$  egyenestől mért távolságát.
- 104) Határozzuk meg a  $P(-1, 2, 3)$  pont  $\frac{x+1}{3} = y = z$  egyenesre vonatkozó tükröképét.
- 105) Írjuk fel a koordinátasíkok egyenleteit.
- 106) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az  $xOy$  koordináta-síkra és azt az  $2x + 3y - 1 = 0$  egyenletű egyenesben metszi.
- 107) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmegy a  $P(-4, 5, 2)$  ponton és tartalmazza az  $Oz$  tengelyt.
- 108) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a  $Q(2, 3, -5)$  ponton és párhuzamos az  $\vec{a}(3, 1, -1)$  és  $\vec{b}(1, -2, 1)$  vektorokkal.
- 109) Írjuk fel az  $A(2, -1, 3)$ ,  $B(3, 1, 2)$  pontokon átmenő és az  $\vec{u}(3, 1, -4)$  vektorral párhuzamos sík egyenletét.
- 110) Írjuk fel az  $A(8, 5, 1)$ ,  $B(-4, 34, -5)$ ,  $C(0, 1, -1)$  pontok síkjának az egyenletét.
- 111) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  tengelyeket rendre a  $9$ ,  $-1$ ,  $-7$  pontokban metszi. Írjuk fel azon egyenesek egyenletét, amelyekben metszi az így kapott sík és a koordináta síkokat.
- 112) Válasszuk ki az alábbi síkpárok közül a párhuzamosokat:
- a)  $2x - 3y + 5z - 7 = 0$  és  $2x - 3y + 5z + 3 = 0$ ;

- b)  $4x + 2y - 4z + 5 = 0$  és  $2x + y + 2z - 1 = 0$ ;
- c)  $x - 3z + 2 = 0$  és  $2x - 6y - 7 = 0$ .
- 113) Írjuk fel az  $M(2, -8, 0)$  ponton átmenő a  $\sqrt{2}x + y - \sqrt{7} - 33 = 0$  síkkal párhuzamos sík egyenletét.
- 114) Írjuk fel a  $P(7, 3, 1)$  ponton átmenő, az  $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+11}{7}$  egyenesre merőleges sík egyenletét.
- 115) Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenleteit, amelyekben a  $2x - 17y + 13z - 4 = 0$  sík metszi a koordináta síkokat.
- 116) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az  $x - 2y + 5z - 3 = 0$  síkra, párhuzamos az  $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{4}$  egyenessel és átmegy a  $P(-3, 2, 1)$  ponton.
- 117) Írjuk fel annak a síkban az egyenletét, amely átmegy az origón és merőleges a  $2x - y + 3z - 1 = 0$  és  $x + 2y + z = 0$  síkokra. Határozzuk meg azokat az egyeneseket, amelyekben metszi a kapott sík az előbbi síkokat.
- 118) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$  és  $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$  egyenesekkel párhuzamos és egyenlő távol van tőlük. Számítsuk ki a két egyenes távolságát.
- 119) Tükrözzük az  $2x - 8y + 3z - 6 = 0$  és  $2x - 8y + 3z + 14 = 0$  síkokat egymásra és írjuk fel a tükörképek egyenletét.
- 120) Az  $m$  paraméter milyen értékére lesz párhuzamos az  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$  egyenes az  $x - 3y + 6z + 7 = 0$  síkkal?
- 121) Bizonyítsuk be, hogy az  $x - 2y + z - 7 = 0$ ,  $2x + y - z + 2 = 0$  és  $x - 3y + 2z - 11 = 0$  síkoknak egy közös pontja van. Számítsuk ki ennek a pontnak a koordinátáit.
- 122) Adjunk meg egy olyan egyenest, amely az  $x - 8y + 4z - 9 = 0$  síktól 4 egységre, a  $4x + 20y - 5z - 42 = 0$  síktól pedig 3 egységre van.