Differenciálszámítás

1) Számoljuk ki a következő függvények deriváltfüggvényeit.

$f(x) = 6x^7 - 7x^4 + 2x^2$; $f(x) = \dfrac{5x-1}{6x^2-2x+1}$; $f(x) = \sqrt{x^2+2}$;

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $f(x) = \sqrt[3]{4x^2+3x}$; $f(x) = (2x^4-3)^5$;

$f(x) = x^3 \sin x - x\cos x$; $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$; $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $f(x) = x^2 \sin(2x+1)$; $f(x) = \sin^2 x$;

$f(x) = \sin(x^2)$; $f(x) = (\sin x + \cos x)^6$; $f(x) = 2\sin x \cos x$;

$f(x) = \sqrt[3]{\cos x - \sin x}$; $f(x) = \sin\sqrt{3x}$; $f(x) = \dfrac{1}{\cos 2x}$;

$f(x) = \sqrt{\mathrm{tg} x}$; $f(x) = \mathrm{tg} x \cos x$; $f(x) = x\ln x - x$;

$f(x) = \ln\sin x$; $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$; $f(x) = \ln\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

$f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$; $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; $f(x) = \log_2(2x^3 - 4x^2)$;

$f(x) = e^{\sin x}\cos x$; $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg} x}{x^2+1}$; $f(x) = x\mathrm{tg}^2 x$;

$f(x) = x^x$; $f(x) = \dfrac{x^2 \mathrm{tg} x}{1+\cos x}$; $f(x) = 2^x$;

$f(x) = \sin\dfrac{1+x}{1+x^2}$; $f(x) = \dfrac{\cos x^4}{2+\sin^3 x}$; $f(x) = \sin^3\left(\dfrac{1+x^2}{\mathrm{tg} 2x}\right)$;

$f(x) = \pi^{\sin x}$; $f(x) = \lg\sin 4x$; $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\mathrm{tg} 3x}{x^2-1}}$; $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$;

$f(x) = \sqrt{\lg(1+\sin^2 x)}$; $f(x) = \sinh[x^3 - \ln x]$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$;

$f(x) = \arcsin\dfrac{2}{x}$; $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$; $f(x) = (x^2+1)^{\sin x}$;

$f(x) = x^{x^x}$; $f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}$; $f(x) = \ln\left[(x+1)^x\right]$.

2) Igazoljuk, hogy a következő függvények deriválhatóak, és számítsuk ki a deriváltfüggvényeket.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg} x, & x \geq 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^3 + x, & x < 0 \end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & x\leq 0\\ 0, & x=0\\ x^2, & x>0\end{cases};$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}|2x-6|^5, & x\neq 3\\ 0, & x=3\end{cases};$

3) Határozzuk meg az $y=3x-x^2$ parabola $x=1$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének az egyenletét.

4) Hol metszi az $y=\ln x$ görbe $x=e$ abszcisszájú pontjához húzott érintője az x tengelyt?

5) Határozzuk meg az $y=\mathrm{tg}x$ görbének azt a pontját, amelyben a görbéhez húzott érintő párhuzamos az $y=2x-5$ egyenessel.

6) Határozzuk meg az $y=x^3-6x+1526$ görbének azon pontjait, amelyekben a görbéhez húzott érintő párhuzamos az $y=6(x-\pi)$ egyenessel.

7) Bizonyítsuk be, hogy az $xy=a^2$ görbe bármely pontjához húzott érintője és a koordinátatengelyek által bezárt háromszög területe független az érintkezési ponttól.

8) Írjuk fel az $y=\mathrm{tg}x$ görbe $x=\frac{\pi}{4}$ abszcisszájú pontjához tartozó normálisának az egyenletét.

9) Írjuk fel az $y=x^2$ parabola azon normálisának az egyenletét, amely az Ox tengellyel 30° fokos szöget zár be.

Implicit függvények deriválása

Tekintsük az $f(x,y)=0$ implicit függvényt. Ki akarjuk számítani az y x szerinti deriváltját (jelölés: y' vagy $\frac{dy}{dx}$), illetve az x y szerinti deriváltját (jelölés: x' vagy $\frac{dx}{dy}$). Ezt a következő összefüggések teszik lehetővé:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)},$$

$$x'=\frac{dx}{dy}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}.$$

1) Számítsuk ki az $x^3+y^3-3xy=0$ implicit függvény esetén az x'-t, illetve y'-t.

Megoldás: Először azonosítjuk a fenti jelölés szerinti $f(x,y)$ függvényt. Ebben az esetben $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Ezután kiszámoljuk $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-3y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3x.$$

Tehát $x'=-\dfrac{3y^2-3x}{3x^2-3y}=-\dfrac{y^2-x}{x^2-y}$ és $y'=-\dfrac{3x^2-3y}{3y^2-3x}=-\dfrac{x^2-y}{y^2-x}$.

2) Számítsuk ki az $y^x=x^y$ implicit függvény esetén az x'-t és y'-t.

Megoldás: Ebben az esetben $f(x,y)=y^x-x^y=e^{x\ln y}-e^{y\ln x}$ és

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{x\ln y}\ln y-e^{y\ln x}\frac{y}{x}=y^x\ln y-x^y\frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x\ln y}\frac{x}{y}-e^{y\ln x}\ln x=y^x\frac{x}{y}-x^y\ln x.$$

Behelyettesítve ezeket a fenti képletbe kapjuk, hogy

$$x'=-\frac{y^x\frac{x}{y}-x^y\ln x}{y^x\ln y-x^y\frac{y}{x}},$$
$$x'=-\frac{y^x\ln y-x^y\frac{y}{x}}{y^x\frac{x}{y}-x^y\ln x}.$$

Paraméteresen adott függvények deriválása

Tekintsük az $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$ paraméteresen adott görbét. Az x t szerinti deriváltját $\dot{x}$-tal jelöljük és

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t.$$

Az y t szerinti deriváltját $\dot{y}$-tal jelöljük és a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t.$$

Az x-nek az y szerinti deriváltját a következőképpen számíthatjuk ki:

$$x'=\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{e^t\sin t+e^t\cos t}{e^t\cos t-e^t\sin t}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}.$$

Továbbá az y-nak az x szerinti deriválját az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$x' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

1) A következő példánkban legyen $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ egy paraméteresen adott görbét. Ekkor

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t,$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \sin t.$$

Ezekből kiszámíthatjuk x', illetve y' a következőképpen:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1 - \cos t}{\sin t},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

2) Határozzuk meg az $y = x^3 - 12x$ függvény helyi szélsőértékeit.

Megoldás: Az $y' = 0$ egyenletből megkapjuk azokat a pontokat, ahol az $y = x^3 - 12x$ függvény felveheti a szélsőértékeit.

$$y' = 3x^2 - 12,$$

A $3x^2 - 12 = 0$ egyenlet megoldásai $x = -2$ és $x = 2$. Ahhoz, hogy megtudjuk mondani, hogy ezekben a pontokban a függvénynek helyi minimuma vagy maximuma van-e szükségünk van a másodrendű deriváltra is: $y'' = 6x$. Az $y''(-2) = -12 < 0$ ezért az $x = -2$ pontban az y függvénynek helyi maximuma van. Mivel $y''(2) = 12 > 0$ ezért az $x = 2$ pontban az y függvénynek helyi minimuma van.

3) Határozzuk meg az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény helyi szélsőértékeit.

Megoldás: Az előbbi feladat megoldása során használt gondolatmenetet követjük.

Kiszámítjuk: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

Az $1 - \frac{1}{x^2} = 0$ egyenletből megkapjuk a lehetséges szélsőérték pontokat: $x = -1$ és $x = 1$.

Kiszámítjuk: $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

Mivel $f''(-1) = -2 < 0$ ezért az $x = -1$ pontban az f függvénynek helyi minimuma van. Továbbá az $f''(1) = 2 > 0$ ezért az $x = 1$ pontban a függvénynek helyi minimuma van.