Függvények határértéke és folytonosság

1) Bizonyítsa be a határérték definíciója alapján, hogy

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+4}=\frac{1}{2}$$

teljesül!

Megoldás (Heine definíciója alapján):

Igazolandó, hogy a függvény értelmezve van a 2 egy környezetében, továbbá $\forall\{x_n\}\to 2$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x_n+1}{5x_n+4}=\dfrac{1}{2}$ fennáll.

Jelöljük f-fel a függvényt! Ekkor $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{5}\right\}$, azaz a függvény a 2 egy környezetében valóban értelmezve van.

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{3x_n+1}{5x_n+4}=\frac{3\lim x_n+1}{5\lim x_n+4}=\frac{3\cdot 2+1}{5\cdot 2+4}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

Megoldás (Cauchy definíciója alapján):

Igazolandó, hogy $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists\delta>0$, úgy, hogy $0<|x-2|<\delta$ esetén f értelmezve van x-ben, továbbá $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{3x+1}{5x+4}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-2}{2(5x+4)}\right|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<\frac{x-2}{2(5x+4)}<\varepsilon$$

$$-2\varepsilon(5x+4)<x-2<2\varepsilon(5x+4)$$

Innen a két relációt kettébontjuk. Az első reláció:

$$-10\varepsilon x-8\varepsilon<x-2$$

$$2-8\varepsilon<x(1+10\varepsilon)$$

$$\frac{2-8\varepsilon}{1+10\varepsilon}<x$$

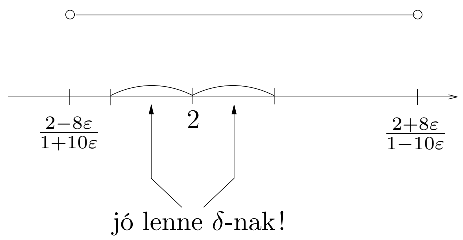
A második reláció:

$$x-2<10\varepsilon x+8\varepsilon$$

$$x(1-10\varepsilon)<8\varepsilon+2\quad \varepsilon<0{,}1\text{ esetén}$$

$$x<\frac{8\varepsilon+2}{1-10\varepsilon}$$

Ábrázoljuk a két relációnak eleget tevő x értékeket számegyenesen!



1. ábra. Alkalmas delták helyzete a számegyenesen

$$2-\frac{2-8\varepsilon}{1+10\varepsilon}=\frac{2+20\varepsilon-2+8\varepsilon}{1+10\varepsilon}=\frac{28\varepsilon}{1+10\varepsilon}$$
$$\frac{2+8\varepsilon}{1-10\varepsilon}-2=\frac{2+8\varepsilon-2+20\varepsilon}{1-10\varepsilon}=\frac{28\varepsilon}{1-10\varepsilon}$$

A két kifejezés közül a felső a kisebb, ezért ez alkalmas is δ-nak.

2) Határozzuk meg az alábbi függvények határértékeit!

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[3]{x^2-4}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{6x}$

Megoldás:

a) A nevezőben lévő gyökjelet az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ nevezetes azonosság segítségével elimináljuk, így a $(x+1)$ tényezővel le lehet egyszerűsíteni:

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{6x^2+3-9x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3\left(1-x^2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)}=\frac{3+3}{6}=1$$

b) A számlálóban lévő gyökjelet nevezetes azonosság segítségével kiküszöböljük, majd az $x^{\frac{4}{3}}$ tényezőt bevisszük a gyökjelek alá:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[3]{x^2-4}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+4}\sqrt[3]{x^2-4}+\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+4}\sqrt[3]{x^2-4}+\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}}\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^3\right]}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+\sqrt[3]{x^4-16}+\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}}\overbrace{\left[\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\right]}^{8}}{\sqrt[3]{x^4+8x^2+16}+\sqrt[3]{x^4-16}+\sqrt[3]{x^4-8x^2+16}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{16}{x^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{8}{x^2}+\frac{16}{x^4}}} = \frac{8}{3}$$

c) A változó transzformációjával 0-hoz tartó határértékké alakítunk:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\cos x} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2}-2\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)} \overset{*}{=}$$

Addíciós összefüggések segítségével tovább alakítunk úgy, hogy ne $\frac{0}{0}$ alakú legyen a határérték:

$$\overset{*}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2}-2\left(\cos z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{2}\left(1-\cos z-\sin\right)} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{2}\left(2\sin^2\frac{z}{2}-2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z2}{\sqrt{2}\left(\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{z}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) A függvényt a tört bővítésével $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértékké alakítjuk át:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{6}\frac{\sin\frac{\pi}{6x}}{\frac{\pi}{6x}} = \frac{\pi}{6}$$

3) Határozza meg a következő függvények bal és jobb oldali határértékét az adott helyen!

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3-x]{4}} \quad x_0 = 3$

b) $\dfrac{1}{(x-1)^6} \quad x_0 = 1$

Megoldás:

a) *Jobb oldali határérték:* Változótranszformációval 0-hoz tartó határértékké alakítunk $x = 3 - h$ $(h > 0)$ helyettesítéssel:

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{1}{1 + \sqrt[3-x]{4}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{h}}} = 0$$

Bal oldali határérték: A módszer hasonló, azonban itt a transzformációs összefüggés $x = 3 + h$, ahol $h > 0$.

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{1 + \sqrt[3-x]{4}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 + 4^{-\frac{1}{h}}} = 1$$

b) Itt is változótranszformációt végzünk:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{(x-1)^6} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^6} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{(x-1)^6} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(-h)^6} = +\infty$$

4) Vizsgálja meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából!

a) $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\dfrac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1}$

c) $\dfrac{1}{\sin 3x}$

Megoldás:

a) A számlálót és a nevezőt szorzattá alakítjuk:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)}$$

Ennek a függvénynek az értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1{,}2\}$, ezen a halmazon folytonos. Egyenként megvizsgáljuk azokat a pontokat, ahol a függvény nem folytonos.
Az $x_0 = 2$-ben vett bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = \frac{7}{1} = 7 = \lim_{x \to 2-0} f(x),$$

azaz $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$. Ezért a függvénynek itt hézagpontja van.
Az $x_0 = 1$-ben vett bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = -\infty$$

Itt tehát nem létezik határérték, a függvénynek $x = 1$-ben *lényeges szingularitása* van. Ez ráadásul *pólus*, mert mindkét oldali határérték abszolútértékben ∞.

b) A függvény nem értelmezett, ha $x = 0$. (Mivel $2^{\frac{2}{x}} + 1 = 0$ sosem teljesül, ezért ez nem szűkíti tovább a D_f-t.) Az értelmezési tartomány tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ezen a halmazon a függvény folytonos.
Az $x = 0$-ban a bal és jobb oldali határértékek:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1} = 3$$

Tehát a függvénynek $x = 0$-ban lényeges szingularitása van.

c) A függvény nem értelmezett, ha $\sin 3x = 0$. Ez akkor áll fenn, ha:

$$3x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

A függvény értelmezési tartománya tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3} \,|k \in \mathbb{Z} \right\}$. A további vizsgálatot a k 3-mas osztási maradéka szerint végezzük el.
Ha $k = 3t\,, t \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}(3t)+0} f(x) = \lim_{x\to \pi t+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}(3t)-0} f(x) = \lim_{x\to \pi t-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

Hasonlóan a többi esetben:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}(3t+1)+0} f(x) = \lim_{x\to \pi t+\frac{\pi}{3}+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}(3t+1)-0} f(x) = \lim_{x\to \pi t+\frac{\pi}{3}-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}(3t+2)+0} f(x) = \lim_{x\to\pi t+\frac{2\pi}{3}+0} \frac{1}{\sin 3t} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}(3t+2)-0} f(x) = \lim_{x\to\pi t+\frac{2\pi}{3}-0} \frac{1}{\sin 3t} = -\infty$$

Látható ezek alapján, hogy minden szakadási helyen pólusa van a függvénynek.

5) Határozza meg a következő függvények aszimptotáinak egyenletét!

a) $\dfrac{3\left(x^2-5\right)}{2\left(x^2+1\right)}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x}$

Megoldás:

a) Az aszimptota $mx+c$ alakú egyenes, ahol

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad c = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right],$$

illetve olyan függőleges $x = x_0$ egyenes, melyre $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.
Ebben a példában $D_f = \mathbb{R}$, ezért függőleges aszimptota nincs.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \frac{3}{2} = c$$

Vagyis egy vízszintes aszimptota van, egyenlete $y = \dfrac{3}{2}$.

b) Az értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Belátjuk, hogy $x = 0$-ban aszimptotája van a függvénynek:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2-4}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0-0} f(x) = +\infty,$$

vagyis az $x = 0$ egyenes valóban aszimptota.
Keressünk nem függőleges aszimptotát!

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x}}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-4}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{4}{x} = 0$$

A másik aszimptota tehát az $y = x$ egyenes.

6) Van-e valós megoldása az $x^4 - 5x^3 + x = 1$ egyenletnek?

Megoldás:

Az $f(x) = x^4 - 5x^3 + x - 1$ függvény folytonos. Könnyen ellenőrizhető, hogy $f(0) = -1 < 0$, valamint $f(5) = 4 > 0$, így Bolzano tétele szerint $\exists\, x \in [-1{,}5] : f(x) = 0$, azaz a fenti egyenletnek van valós gyöke.

7) Mivel egyenlő az alábbi kifejezés:

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$$

Megoldás:

Addíciós tétellel:

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right) = \\
&= \sin\arcsin\frac{4}{5} \cdot \cos\arcsin\frac{5}{13} + \sin\arcsin\frac{5}{13} \cdot \cos\arcsin\frac{4}{5} = \\
&= \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48+15}{65} = \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

8) A következő példákban a függvények határértékeinek meghatározásának leggyakoribb módszereit mutatjuk be egy-egy példával.

a) A számláló és nevező szorzattá alakítása után:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x+1} = \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3}$$

b) A számlálóban elimináljuk a négyzetgyököt, ezután könnyen adódik a határérték:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c) Szorzattá alakítás és egyszerűsítés után:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8}{6}\,\frac{x^3-\frac{1}{8}}{x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}} = \frac{8}{6}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \\
&= \frac{8}{6}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{3}} = \frac{8}{6}\cdot\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{8}{6}\cdot\frac{\frac{8}{4}}{\frac{3-2}{6}} = \frac{8}{6}\cdot\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}} = 6
\end{aligned}$$

d) $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértékre visszavezethető a tört bővítésével:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5$$

e) Szintén $\frac{\sin x}{x}$ alakra vezet, ha felhasználjuk a tangens definícióját:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = 1$$

f) A tangens definícióját felhasználva három egyszerűbb határérték szorzatára bomlik fel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{(\cos x)\,x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x} \overset{*}{=} 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

A *-gal jelölt egyenlőség bizonyítása:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

g) Racionális törtfüggvény határértéke $x\to\infty$-ban:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-5x^2}{3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x}-5}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\frac{5}{3}$$

h) Két szögfüggvény különbségére vonatkozó nevezetes azonosság segítségével két $\frac{\sin x}{x}$ alakú határértéket kapunk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{6x+3x}{2}\sin\frac{6x-3x}{2}}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{3x}{2}\frac{21}{4}}{\frac{7x}{2}\frac{3x}{2}} = -\frac{21}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} = -\frac{21}{2}$$

i) A $\cos x$-et $\frac{x}{2}$ argumentumú szögfüggvényekkel felírva egyszerűsíthető a tört:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

j) Helyettesítéses határérték:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x \overset{*}{=}$$

A helyettesítés képlete: $-\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{u}$, amiből átrendezéssel: $x = 2u - 1$.
Ezzel a határérték:

$$\stackrel{*}{=} \lim_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{-2u-1} = \lim_{u\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{-2} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{-1} = e^{-2}\cdot 1 = \frac{1}{e^2}$$

k) Rendőr-elv alkalmazása:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}$$

A gyökjel alatti mennyiséget alulról és felülről becsüljük, felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$, kapjuk:

$$\sqrt[x]{2} < \sqrt[x]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}} < \sqrt[x]{3}$$

Itt $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{2} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{3} = 1$, ezért az eredeti függvényre is $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right) = 1$.

l) Helyettesítéses határérték:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-2+3}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2+\frac{3}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} 2^x \left(1+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}\right)^{x}$$

A helyettesítés: $\dfrac{1}{u} = \dfrac{\frac{3}{2}}{x-1}$, vagyis $x = \dfrac{3}{2}u + 1$. Ezzel a zárójelben lévő kifejezés határértéke:

$$\lim_{u\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{\frac{3}{2}} \left(1+\frac{1}{u}\right) = e^{\frac{3}{2}}$$

De $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$, tehát $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x} = +\infty$.

m) A tangens definíciója, és a szögfüggvények transzformációjával:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right) \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right) \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \sin x = 1$$

n) Racionális törtfüggvény határértéke esetében a nevező legnagyobb fokszámú tagjával egyszerűsítünk:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-x+2}{8x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{5}{8}$$

o) $\frac{\sin x}{x}$ típusú határértéket kapunk, ha bővítünk $5x$-szel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\frac{5x}{\operatorname{tg} 5x}=\frac{8}{5}$$

9) Számoljuk ki a következő függvényhatárértékeket.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 100x}{x};\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{1-x^2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{2x^2};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^4};$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 4x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3^x-x^3}{x-3};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2};\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+7^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x};\qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right);\qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}\right);$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}};\qquad \lim_{x\to 0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{x^2}};\qquad \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$\lim_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}};\qquad \lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}};\qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arcsin x)}{x};\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1};$$

10) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin x$ függvénynek létezik-e határértéke a $+\infty$-ben?

11) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3-1}{3x^3+x+2}$ függvény esetén számoljuk ki a $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ és $\lim_{x\to-\infty} f(x)$-et.

12) Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right);\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2};$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x-\cos x}{x};$$

13) Igazoljuk, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } x\in\mathbb{Q}\\ -1, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, úgynevezett Dirichlet függvénynek egyetlen pontban sincs határértéke. Tehát sehol sem folytonos.

14) Folytonos-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\{x\}$ függvény, ahol $\{x\}$ az x törtrészét jelöli.

15) Vizsgáljuk a következő függvények folytonosságát:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, x > 0, \\ 0, x \leq 0 \end{cases};$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x, x \neq 0, \\ 2, x = 0 \end{cases}.$$

16) Folytonos-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvény?