Komplex számok

A valós számok és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. A számfogalom a számegyenes pontjainak körében nem bővíthető tovább. A számfogalom bővítését indokolja az, hogy például az

$$x^2 = -1 \quad \text{és} \quad x^2 + x + 1 = 0$$

egyenletek megoldását számnak tekinthessük:

$$x = \sqrt{-1} = \imath \textit{ (imaginárius egység)}, \quad \text{illetve} \quad x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\imath$$

Komplex számnak nevezük az $a + b\imath$ szimbólummal jelölt számokat, ha a és b valós. Az $a + b\imath$ ún. *algebrai alakú komplex szám* valós része a, imaginárius vagy képzetes része b.

Megállapodunk abban, hogy a komplex számok között az összeadást, kivonást, szorzást, osztást ugyanolyan szabályok szerint végezzük el, mint a valós számok körében. (Bebizonyítható, hogy ez a megállapodás lehetséges, és a komplex számok halmazán ugyanazok az azonosságok érvényesek, mint a valós számokra.)

Komplex szám akkor és csakis akkor 0, ha $a + bi$-ben $a = 0$ és $b = 0$.
$b = 0$-ra a komplex számok részhalmaza a valós számok.
$a = 0$-ra a komplex számok részhalmaza az imaginárius számok.

Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha a valós részei és imaginárius részei egyenlők:

$$a_1 + b_1\imath = a_2 + b_2\imath \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$$

Összeadás: $(a + b\imath) + (c + d\imath) = (a + c) + (b + d)\imath$.
Szorzás: $(a + b\imath)(c + d\imath) = ac + bc\imath + ad\imath + bd\imath^2 = (ac - bd) + (bc + ad)\imath$.

Példák:

$$(6+2\imath)+(8-4\imath)=14-2\imath$$

$$(-3+4\imath)(7+3\imath)=-21+28\imath-9\imath-12=-33+19\imath$$

$$(5+2\imath)(5-2\imath)=25+4=29$$

$$(5+2\imath)^2=25+20\imath-4=21+20\imath$$

$$\imath^2=-1\,,\quad \imath^3=-\imath\,,\quad \imath^4=1\,,\quad \imath^5=\imath$$

Két komplex szám hányadosa *(osztás)*:

$$\frac{a+b\imath}{c+d\imath}=\frac{(a+b\imath)(c-d\imath)}{(c+d\imath)(c-d\imath)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\imath}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\imath$$

Példa hatványozásra:

$$(5+\imath)^3=5^3+3\cdot5^2\cdot\imath+3\cdot5\cdot\imath^2+\imath^3=125+75\imath-15-\imath=110+74\imath$$

Komplex számsík

A komplex számokról szemléletes képet kapunk a komplex számsík által.

1) A komplex számok és a rendezett számpárok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

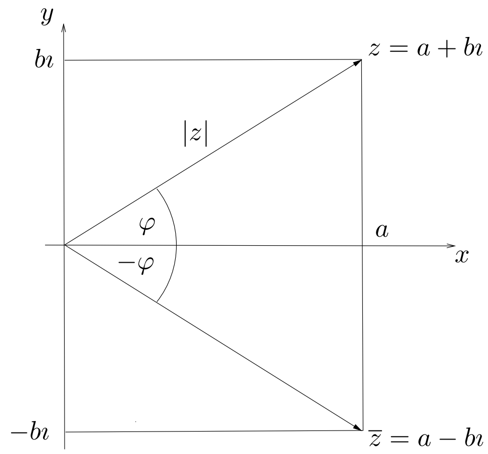
2) A rendezett számpárok és a koordinátasík pontjai között ugyancsak kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés.

A $z=a+b\imath$ komplex számhoz tartozik az (a,b) pont és a hozá tartozó helyvektor. Ennek hossza a szám abszolútértéke: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. A komplex szám argumentuma vagy irányszöge az a szög, amellyel az x tengelyt pozitív irányban elforgatva fedi a vektort. Ez az argumentum forgásszög, tehát φ, $\varphi\pm$ $\pm\,360°$, $\varphi\pm2\cdot360°$, $\dots$ ugyanazt a komplex számot határozza meg. Negatív irányban forgatva a φ szög negatív értelmű. Jele: $\arg z=\varphi$. Bizonyítható:

1) $\quad |z_1z_2|=|z_1||z_2|$

2) $\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Konjugált komplex számok:
$z=a+b\imath$ és $\overline{z}=a-b\imath$ egymás konjugáltjai: $\overline{z}$ a z-nek a valós tengelyre való tükörképe:



1) $|z| = |\overline{z}|$

2) $\arg z = -\arg \overline{z}$

3) $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2 \quad$ ugyanis $\quad (a + b\imath)(a - b\imath) = a^2 + b^2$

Konjugáltakra vonatkozó azonosságok:

1) $\overline{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

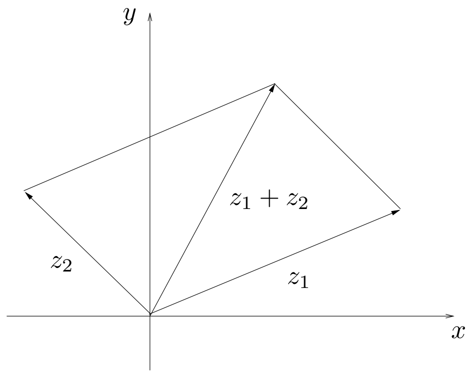
4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

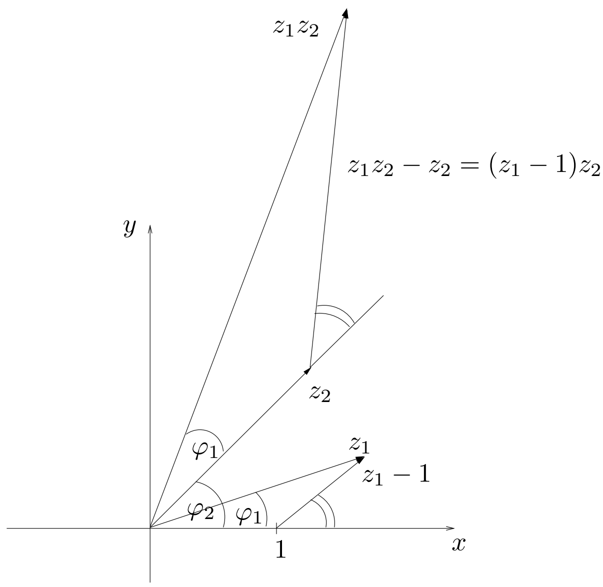
A $z = a + b\imath \neq 0$ *komplex szám inverze*:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - b\imath}{a^2 + b^2}.$$

Komplex számok összeadása a vektorösszeadás szabályai szerint történik, szemléltetése is ennek megfelelő. A sík minden z pontjához a b komplex számot adva a kapott $z' = z + b$ komplex számoknak megfelelő pontok a sík pontjainak b vektorral való *eltolásával* adódnak.

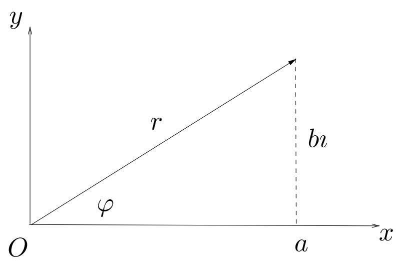
Komplex számok szorzása a korábbi azonosságokból következik. Az ábrán lévő kisebb háromszög mindegyik oldalához tartozó számot z_2-vel szorozva a nagyobb háromszög oldalvektorait kapjuk. Innen következik, hogy $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$





és $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 \arg z_2$. A $z' = az$ leképezés $\arg z$-vel való elforgatás és $|a|$-kel való nyújtás egymásutánja: *forgatva nyújtás.*

Komplex számnak valós számmal való szorzása: az O pontra vonatkozó *centrális hasonlóság.*



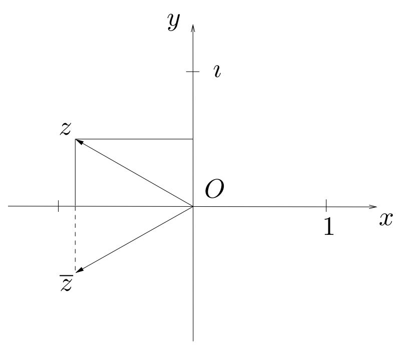
Komplex számok trigonometrikus alakja

$$z = \underbrace{a + b\imath}_{\text{algebrai alak}} = \underbrace{r(\cos\varphi + \imath \sin\varphi)}_{\text{trigonometrikus alak}}$$

ahol

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

1) Írjuk fel trigonometrikus alakban a $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\imath$ komplex számot!



$$r = |z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 150^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \sin 150^\circ$$

Tehát z trigonometrikus alakja: $z = \cos 150^\circ + \imath \sin 150^\circ$.
z konjugáltjának trigonometrikus alakja: $\overline{z} = \cos 210^\circ + \imath \sin 210^\circ$.

2) Írjuk fel a $z = 5(\cos 60^\circ + \imath \sin 60^\circ)$ trigonometrikus alakban adott komplex számot algebrai alakban!

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{így} \quad z = \frac{5}{2} + \imath \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Szorzás trigonometriai alakban:
Ha

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + \imath \sin \varphi_1) \quad \text{és} \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + \imath \sin \varphi_2),$$

akkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos \varphi_1 + \imath \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + \imath \sin \varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \imath \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \imath \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \imath \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Hatványozás trigonometriai alakban:

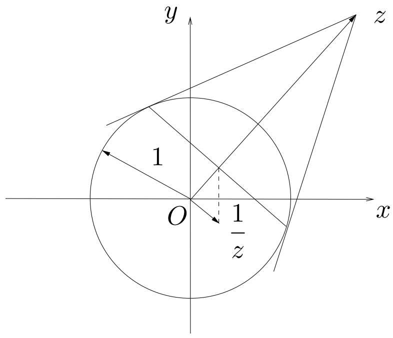
$$z^n = r \cdot r \cdot \ldots \cdot r\big\{(\cos(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi) + \imath \sin(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi)\big\} =$$
$$= r^n(\cos n\varphi + \imath \sin n\varphi) \qquad \text{(Moivre-képlet)}$$

Osztás trigonometriai alakban:
A $z = r(\cos \varphi + \imath \sin \varphi) \neq 0$ komplex szám reciproka:
$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\big(\cos(-\varphi) + \imath \sin(-\varphi)\big)$, ugyanis így $z\frac{1}{z} = r\frac{1}{r}\big(\cos(\varphi - \varphi) + \imath \sin(\varphi - \varphi)\big) = 1$.
Ha

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + \imath \sin \varphi_1) \quad \text{és} \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + \imath \sin \varphi_2) \neq 0,$$

akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \imath \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$



Komplex szám reciprokának geometriai tartalma: z-nek az egységkörre vonatkozó tükörképét (inverzét) tükrözzük a valós tengelyre.
Komplex számok n-edik gyöke: Ha

$$w = t(\cos\phi + \imath\sin\phi) \quad \text{és} \quad z = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi),$$

akkor $w^n = z$ esetén

$$w^n = t^n(\cos n\phi + \imath\sin n\phi) = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi),$$

innen

$$t = \sqrt[n]{r} \quad \text{és} \quad n\phi - \varphi = k \cdot 360°,$$

mivel az irányszögek 360° egészszámszorosával különbözhetnek, tehát $\phi = \dfrac{\varphi + k \cdot 360°}{n}$, ahol k tetszőleges egész szám. Így

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 360°}{n} + \imath\sin\frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}\right)$$

$k = 0{,}1,\dots,n-1$ választásával n darab különböző gyök adódik, k további értékeire ezek ismétlődnek. Tehát egy komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Komplex szám exponenciális alakja

$$z = re^{\imath\varphi} = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)$$

Példák

1) Határozzuk meg a $z_1 = 4$ és $z_2 = -4$ komplex számok négyzetgyökét!

$$z_1 = 4 = 4(\cos 0^\circ + \imath \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt{z_1} = 2\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 0^\circ}{2} + \imath\sin\frac{\varphi + k\cdot 0^\circ}{2}\right) \quad k = 0{,}1 \quad \text{tehát}$$

$$\sqrt{z_1} = \begin{cases} 2(\cos 0^\circ + \imath \sin 0^\circ) = 2 \\ 2(\cos 180^\circ + \imath \sin 180^\circ) = -2 \end{cases}$$

$$z_2 = -4 = 4(\cos 180^\circ + \imath \sin 180^\circ)$$

$$\sqrt{z_2} = 2\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 180^\circ}{2} + \imath\sin\frac{\varphi + k\cdot 180^\circ}{2}\right) \quad k = 0{,}1 \quad \text{tehát}$$

$$\sqrt{z_2} = \begin{cases} 2(\cos 90^\circ + \imath \sin 90^\circ) = 2\imath \\ 2(\cos 270^\circ + \imath \sin 270^\circ) = -2\imath \end{cases}$$

2) Számítsuk ki a $z_1 = 5(\cos 40^\circ + \imath \sin 40^\circ)$ és $z_2 = 3(\cos 18^\circ + \imath \sin 18^\circ)$ komplex számok szorzatát és hányadosát!

$$z_1 z_2 = 15\big(\cos(40^\circ + 18^\circ) + \imath\sin(40^\circ + 18^\circ)\big) = 15(\cos 58^\circ + \imath \sin 58^\circ)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}\big(\cos(40^\circ - 18^\circ) + \imath\sin(40^\circ - 18^\circ)\big) = \frac{5}{3}(\cos 22^\circ + \imath \sin 22^\circ)$$

3) Számítsuk ki az $\imath$ komplex szám harmadik gyökeit!

$$i = 1(\cos 90^\circ + \imath \sin 90^\circ)$$

$$\sqrt[3]{\imath} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + \imath\sin\frac{90^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right) \quad k = 0{,}1{,}2$$

$$\sqrt[3]{\imath}_1 = \cos 30^\circ + \imath \sin 30^\circ$$

$$\sqrt[3]{\imath}_2 = \cos\frac{90^\circ + 360^\circ}{3} + \imath\sin\frac{90^\circ + 360^\circ}{3} = \cos 150^\circ + \imath \sin 150^\circ$$

$$\sqrt[3]{\imath}_3 = \cos\frac{90^\circ + 720^\circ}{3} + \imath\sin\frac{90^\circ + 720^\circ}{3} = \cos 270^\circ + \imath \sin 270^\circ$$

4) Számítsuk ki a $z = 1$ komplex szám negyedik gyökeit!

$$1 = 1(\cos 0^\circ + \imath \sin 0^\circ)$$

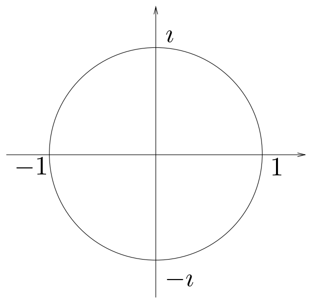
$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{4} + \imath\sin\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}\right) \qquad k = 0{,}1{,}2{,}3$$

$$\sqrt[4]{1}_1 = \cos 0^\circ + \imath\sin 0^\circ = 1$$

$$\sqrt[4]{1}_2 = \cos\frac{360^\circ}{4} + \imath\sin\frac{360^\circ}{4} = \cos 90^\circ + \imath\sin 90^\circ = \imath$$

$$\sqrt[4]{1}_3 = \cos\frac{720^\circ}{4} + \imath\sin\frac{720^\circ}{4} = \cos 180^\circ + \imath\sin 180^\circ = -1$$

$$\sqrt[4]{1}_4 = \cos\frac{1080^\circ}{4} + \imath\sin\frac{1080^\circ}{4} = \cos 270^\circ + \imath\sin 270^\circ = -\imath$$



5) Határozzuk meg annak a négyzetnek a csúcsait, amelynek A és B csúcsát a $z_a = 3 + 2\imath$ illetve a $z_b = 5 + 4\imath$ komplex számok jelölik ki a komplex számsíkon!

$$\overrightarrow{AB} = z_b - z_a = 2 + 2\imath$$

$\imath$-vel való szorzás pozitív 90°-os forgatást, $-\imath$-vel való szorzás negatív 90°-os forgatást jelent. Így

$$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AB}\cdot\imath = (2+2\imath)(\imath) = -2+2\imath, \qquad \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{AB}\cdot(-\imath) = (2+2\imath)(-\imath) = 2-2\imath$$

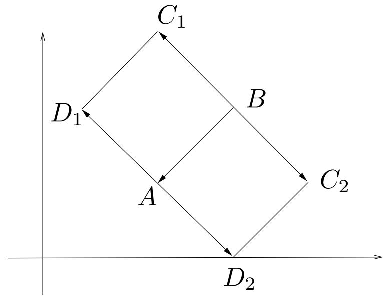
Ebből:

$$C_1 = z_b + \overrightarrow{AD_1} \quad \longrightarrow \quad 5 + 4\imath - 2 + 2\imath = 3 + 6\imath$$

$$D_1 = z_a + \overrightarrow{AD_1} \quad \longrightarrow \quad 3 + 2\imath - 2 + 2\imath = 1 + 4\imath$$

$$C_2 = z_b + \overrightarrow{AD_2} \quad \longrightarrow \quad 5 + 4\imath + 2 - 2\imath = 7 + 2\imath$$

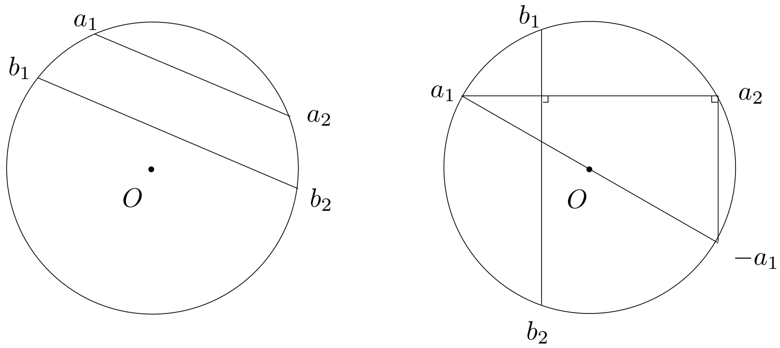
$$D_2 = z_a + \overrightarrow{AD_2} \quad \longrightarrow \quad 3 + 2\imath + 2 - 2\imath = 5$$



6) Mutassuk meg, hogy az O középpontú kör két húrjának a_1, a_2 illetve b_1, b_2 végpontjaira:

$$a_1a_2 = b_1b_2 \iff a_1a_2 \parallel b_1b_2$$

$$a_1a_2 = -b_1b_2 \iff a_1a_2 \perp b_1b_2$$



Párhuzamosság esetén: a_1-et b_1-be ugyanolyan szögű forgatás viszi, mint b_2-t a_2-be. Azaz $a_1 \cdot e = b_1$ illetve $a_2 \cdot e = b_2$. Innen $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$, tehát

$a_1a_2 = b_1b_2$. A bizonyítás megfordítható.

Merőlegesség esetén: $\overrightarrow{-a_1a_2}$ párhuzamos $\overrightarrow{b_2b_1}$-vel. Innen $-a_1a_2 = b_2b_1$, azaz $a_1a_2 = -b_1b_1$. A bizonyítás megfordítható.

7) Mi a geometriai helye a következő összefüggéseket kielégítő pontoknak:

a) $\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$	*b*) $\mathrm{Re}(2z-1) = 5$	*c*) $\lvert z\rvert < 1 - \mathrm{Re}z$
d) $\mathrm{Im}z > 0$	*e*) $\lvert z-1\rvert\lvert z+1\rvert = a$	*f*) $\lvert z^2+2z-3\rvert = a$
g) $\mathrm{Re}z^2 = 4$	*h*) $\lvert z-\imath\rvert < 2$	*i*) $\left.\begin{array}{l}\lvert z\rvert < 3\\ \lvert z-1\rvert > 1\end{array}\right\}$

a) Az a és b pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese.

b) Az $x = 3$ egyenes.

c) Az $y^2 = 1 - 2x$ parabola belseje.

d) Az $y > 0$ félsík (felső félsík).

e) ± 1 fókuszú lemniszkáták. Ha $a < 1$, akkor e lemniszkáták két önálló oválisból állnak, ha $a = 1$, akkor a Bernoulli-féle lemniszkátát kapjuk, ha $a > 1$, akkor zárt görbéket kapunk.

f) Lemniszkáták.

g) Az $x^2 - y^2 = 4$ hiperbola.

h) Az $M(0{,}1)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú kör belseje.

i) Az $x^2 + y^2 = 9$ és $(x-1)^2 + y^2 = 1$ körök közötti gyűrűszerű tartomány.

Feladatok

1) Írja fel exponenciális alakban a $z = 1 + \imath\sqrt{3}$ és a $z = 1 - \cos\alpha + \imath\sin\alpha$ komplex számokat.

2) Számítsa ki és szerkessze meg a z_1z_2 szorzatot, ha

a) $z_1 = 3 + 5\imath$	b) $z_1 = 3 + 5\imath$	c) $z_1 = 3 + 5\imath$
$z_2 = 1 - \imath$	$z_2 = 1 - \imath$	$z_2 = 1 - \imath$

3) Számítsa ki a $(2 - 3\imath)e^{\imath\frac{\pi}{3}}$ és a $(\cos 105^\circ + \imath\sin 105^\circ)(\cos 15^\circ + \imath\sin 15^\circ)$ szorzatokat.

4) Számítsa ki a $\overline{(2+\imath)}(4-7\imath)$ szorzatot.

5) A $z = 2-\imath$ komplex számot – mint vektort – forgassa el $60°$-kal és zsugorítsa felére az abszolútértékét.

6) A $z = 4-6\imath$ komplex számot – mint vektort – hány fokos szöggel kell elforgatni, hogy eredményül a $2\sqrt{3}+3+\imath(2-3\sqrt{3})$ komplex számot kapjuk?

7) Számítsa ki az $5e^{\imath\frac{2\pi}{3}}(4-\imath)\left(\cos\frac{\pi}{3}+\imath\sin\frac{\pi}{3}\right)$ szorzatot.

8) Számítsa ki a következő hányadosokat:

a) $\dfrac{3+2\imath}{3-2\imath}$	*b)* $\dfrac{5+\imath}{2-\imath}$	*c)* $\dfrac{2+4\imath}{3-2\imath}$
d) $\dfrac{2+4\imath}{\cos 75° + \imath\sin 75°}$	*e)* $\dfrac{e^{\imath\frac{\pi}{6}}}{1+\imath}$	*f)* $\overline{\left(\dfrac{2-\imath}{e^{\imath\frac{\pi}{3}}}\right)}$
g) $\dfrac{\imath}{(1-\imath)(2+\imath)}$	*h)* $\dfrac{\cos 105° + \imath\sin 105°}{\cos 15° + \imath\sin 15°}$	*i)* $\dfrac{1-\frac{1}{\imath}}{1+\frac{1}{\imath}}$
j) $\dfrac{5-2\imath}{\imath}$	*k)* $\dfrac{1}{1+\imath}$	*l)* $\dfrac{1+\imath}{1-\imath}$

9) Számítsa ki a következő hatványokat:

a) $(2-\imath)^5$	*b)* $(\imath-1)^{16}$	*c)* $\left(\dfrac{\imath}{1-\imath}\right)^8$
d) $\left(\dfrac{(2-\imath)\overline{(2+3\imath)}}{\imath-3}\right)^2$	*e)* $(\cos 15° + \imath\sin 15°)^{24}$	*f)* $\left(e^{\imath\frac{\pi}{6}}\right)^{18}$
g) $\left(\overline{(1+\imath)}e^{\imath\frac{\pi}{4}}\right)^3$	*h)* $\left(\dfrac{1}{\imath}\right)^5$	*i)* $\left(\dfrac{1+\imath}{1-\imath}\right)^4$

10) A $(\cos\varphi+\imath\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \imath\sin n\varphi$ összefüggés felhasználásával igazolja, hogy

$$\cos 6\varphi = \cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi,$$

illetve

$$\sin 8\varphi = 8\sin\varphi\cos^7\varphi - 56\sin^3\varphi\cos^5\varphi + 56\sin^5\varphi\cos^3\varphi - 8\sin^7\varphi\cos\varphi.$$

11) Végezze el a következő gyökvonásokat:

a) $\sqrt[3]{-8}$ *b)* $\sqrt[4]{-2}$ *c)* $\sqrt[3]{5\imath}$

d) $\sqrt{-1+\imath}$ *e)* $\sqrt[4]{1+\imath\sqrt{3}}$ *f)* $\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{4}+\imath\sin\frac{3\pi}{4}}$

g) $\sqrt[4]{\frac{1}{1-\imath}(-1+\imath)}$ *h)* $\sqrt[3]{-1}$ *i)* $\sqrt[5]{-1}$

j) $\sqrt[8]{1}$ *k)* $\sqrt[6]{8e^{\imath\frac{\pi}{3}}}$ *l)* $\sqrt[3]{\imath e^{\imath\frac{3\pi}{4}}}$

12) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $x^5-1=0$ *b)* $x^6+64=0$ *c)* $5z^2=128\imath$

d) $9z^3-\dfrac{1}{3}=0$ *e)* $(6-z)^6+1=0$ *f)* $z^4-81\imath=0$

13) Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{array}{l} z_1+2z_2=1+\imath \\ 3z_1+\imath z_2=2-3\imath \end{array}\right\}$ *b)* $\left.\begin{array}{l} (1+\imath)z_1-(1-\imath)z_2=0 \\ (2+\imath)z_1-(1-2\imath)z_2=0 \end{array}\right\}$

14) Végezzük el a műveleteket:

a) $(1+\imath)^4$ *b)* $(1-\imath)^6$ *c)* $(1-\sqrt{3}\imath)^{-4}$

15) Végezzük el a műveleteket:

a) $(1+2\imath)(1-3\imath)$ *b)* $\frac{1+\imath}{1-\imath}$

c) $(2+3\imath)+(2+4\imath)(1-3\imath)$ *d)* $\left(\frac{1-\imath}{1+\imath}\right)^5$

16) Számítsuk ki:

$$\left(\frac{20+5\imath}{7+6\imath}\right)^4+\left(\frac{19+7\imath}{9-\imath}\right)^4.$$

17) Igazoljuk, hogy a $z_0=1+3\imath$ komplex szám megoldása a $z^3-z^2+8z+10=0$ egyenletnek.

18) Igazoljuk, hogy tetszőleges z_1, z_2 komplex szám esetén

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

Mi a feladat geometria jelentése?

19) Igazoljuk a következő összefüggéseket:

$$\sin(a) + \sin(a+r) + \ldots + \sin(a+nr) = \frac{\sin\left(a + \frac{nr}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)}{\sin\left(\frac{r}{2}\right)};$$

$$\cos(a) + \cos(a+r) + \ldots + \cos(a+nr) = \frac{\cos\left(a + \frac{nr}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)}{\sin\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

20) Számoljuk ki az $(1+2\imath)z^2 + 2z + (3-\imath) = 0$ másodfokú egyenlet gyökeit.

21) Legyen a síkban A, B, C, D négy pont és jelöljük a, b, c, d-vel az nekik megfelelő komplex számokat. Igazoljuk, hogy az AB és CD szakaszok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\frac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R}$.

22) Legyen ABC és $A'B'C'$ két háromszög a síkban. Jelöljük kisbetűvel a pontnak megfelelő komplex számot. Igazoljuk, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek pontosan akkor hasonlóak, ha $\frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'}$.

23) Szokás szerint kisbetű jelöli az A,B,C pontoknak megfelelő komplex számokat. Az ABC háromszög pontosan akkor egyenlő oldalú, ha

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac.$$