Számsorozatok

Binomiális együttható fogalma: Az $\binom{n}{k}$-val jelölt binomiális együttható kiszámítása: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$; jelentése: egy n elemű halmaz k-elemű részhalmazainak a száma (n elemből hányféleképpen lehet kiválasztani k elemet; ismétlés nélküli kombinációk száma). Néhány összefüggés:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
- $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

  ◇ **Binomiális tétel:** $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

  ◇ **Bernoulli-egyenlőtlenség:** Ha $\alpha > -1$, akkor $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Számsorozat fogalma: Számsorozatnak nevezünk egy a_n $(n = 1,2,\dots)$ sorozatot, ahol $a_n \in \mathbb{R}$ minden n-re.
Zérussorozat fogalma: Az a_n sorozatot zérussorozatnak (vagy *nullsorozat*nak) nevezzük, ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Konvergens számsorozat: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, azaz az a_n számsorozat határértéke az a szám (a_n konvergál a-hoz), ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ értékhez létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $|a_n - a| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$.

  ◇ Konvergens számsorozat mindig korlátos.

  ◇ Minden korlátos, monoton sorozat konvergens.

  ◇ **Cauchy-féle konvergenciakritérium:** Az a_n számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ értékhez létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ha $n, m > N(\varepsilon)$.

Részsorozat fogalma: Az a_n számsorozat egy részsorozatának nevezzük az a_{n_i} számsorozatot, ahol $i = 1,2,\dots$ és a_{n_i} minden tagja eleme az a_n részsorozatnak.

◇ Konvergens számsorozat részsorozata is konvergens, és határértékeik egyenlők.

Következmények konvergens a_n és b_n sorozatokra:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, ahol $b_n \neq 0$ $\forall n$ esetén és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^{b_n} = a^{\lim_{n\to\infty} b_n}$,
- Ha b_n egy pozitív tagú sorozat, akkor
$$\lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)^{\lim_{n\to\infty} a_n},$$
- Legyen a_n egy nullához tartó konvergens sorozat és b_n egy korlátos sorozat. Ekkor az $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.
- Ha a_n egy konvergens sorozat és b_n egy divergens sorozat, akkor $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ divergens.
- Fogó tétel: Ha egy b_n sorozat esetén létezik két a_n és c_n konvergens sorozat és $N > 0$ természetes szám úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ és $a_n \leq b_n \leq c_n$ minden $n > N$ esetén, akkor a b_n sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.
- A fogó tételhez hasonlóan, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) és $a_n \leq b_n$ ($a_n \geq b_n$), akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$).
- Hányados kritérium: Ha az a_n pozitív tagú sorozat fennáll, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ $= l$ akkor igazak a következő állítások:

  1. ha $l < 1$ akkor az a_n sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
  2. ha $l < 1$ akkor az $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens;
  3. ha $l > 1$ akkor az a_n sorozat divergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
  4. ha $l > 1$ akkor az $(a_1 + \ldots + a_n)_{n\geq 1}$ sorozat divergens;
  5. ha $l = 1$ akkor az a_n sorozat lehet konvergens és divergens is.

Néhány fontos határérték

- Ha $\begin{cases} |q| < 1, \text{ akkor } \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \\ q = 1, \text{ akkor } \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1, \\ |q| > 1, \text{ akkor } \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \pm\infty \text{ (divergens)}; \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \dfrac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)!}\right) = e$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{p}{n}\right)^n = e^p$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{n!} = 0$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, ha $a > 0$;

- Legyen $P(n) = a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0$ egy p-ed fokú polinom ($p \geq 1$). Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } a_p < 0 \\ +\infty, & \text{ha } a_p > 0 \end{cases}$$

- Legyen $P(n) = a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0$ egy p-ed fokú, illetve $Q(n) = b_q n^q + + \ldots + b_1 n + b_0$ egy q-ad fokú polinom. Tegyük fel, hogy $Q(n) \neq 0$ bármely esetén. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \dfrac{a_p}{b_q}, & \text{ha } p = q \\ 0, & \text{ha } p < q \\ \pm\infty, & \text{ha } p > q \end{cases}$$

- Tegyük fel, hogy az a_n konvergens sorozat tagjai nem negatívak. Ekkor a $(\sqrt[k]{a_n})_{n\geq 1}$ sorozat konvergens minden $k > 1$ természetes számra és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

- Ha $a_n > 0$ minden n esetén és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ akkor $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

Példák

1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\dots,\ \frac{1}{n},\dots \to 0$, ha $n \to \infty$, azaz nullsorozat.

2) Az $1,\ 4,\ 9,\dots,\ n^2,\dots$ sorozat divergens.

3) A $0{,}9;\ -0{,}99;\ 0{,}999;\ -0{,}9999;\dots$ sorozat páratlan indexű elemeiből álló részsorozat határértéke 1, míg a páros indexű tagokból álló részsorozat határértéke -1. Az eredeti sorozatnak tehát két különböző sűrűsödési helye (torlódási pontja) van, tehát a sorozat divergens.

4) Az $a_n = \left\{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\dots,\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n},\dots\right\} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ sorozat váltakozó előjelű (alternáló), illetve $|a_n| = \frac{1}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$. Az ilyen sorozatokat *Leibniz-sorozat*nak nevezzük. Leibniz-sorozat mindig konvergens: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5) Az $a_n = \{1,\ -1,\ 1,\ -1,\dots\} = (-1)^{n-1}$ sorozat divergens.

6) $a_n = \{1;\ 1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\dots\} = 1 + \frac{1}{10^{n-1}}$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

7) $a_n = \left\{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\dots\right\} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

8) Az $a_n = \{0,\ 1,\ 0,\ 1,\dots\} = \frac{1+(-1)^n}{2}$ sorozat divergens, mert két torlódási pontja van.

9) $a_n = \left\{0,\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{6},\ \frac{12}{11},\ \frac{16}{18},\dots\right\} = \frac{4n}{n^2+2} = \frac{1}{\frac{n^2+n}{4n}} = \frac{1}{\frac{n}{4}+\frac{1}{2n}}$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

10) $a_n = \frac{3n+1963}{2n-1526} = \frac{3+\frac{1963}{n}}{2-\frac{1526}{n}} \to \frac{3}{2}$, ha $n \to \infty$.

11) $a_n = \frac{n^2-6n+7}{n^2+12n+49} = \frac{1-\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}}{1+\frac{12}{n}+\frac{49}{n^2}} \to 1$, ha $n \to \infty$.

12)

$$a_n = \frac{(3n+2)(n^2-n+1)}{(n+1)^2(5n+3)} = \frac{3n^3+2n^2-3n^2-2n+3n+2}{5n^3+10n^2+5n+3n^2+6n+3} =$$

$$= \frac{3n^3-n^2+n+2}{5n^3+13n^2+11n+3} = \frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{5+\frac{13}{n}+\frac{11}{n^2}+\frac{3}{n^3}} \to \frac{3}{5},\ \text{ha } n\to\infty.$$

13) $a_n = \dfrac{n^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{n^3-\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, mert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n} = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3} = 0$.

14) $a_n = \dfrac{5n^2-3n-1}{n^3+1} = \dfrac{\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} \to 0$, ha $n\to\infty$.

15) $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{n}$; $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = ?$

Mivel $\underbrace{\dfrac{1}{\nu+1}}_{1.}+\underbrace{\dfrac{1}{\nu+2}}_{2.}+\dots+\underbrace{\dfrac{1}{2\nu}}_{\nu.} > \dfrac{1}{2} \quad (\nu = 2{,}3,\dots)$, így

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots+$$
$$+\dots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^k}\right) > 1+\frac{k}{2},$$

ami $k\to\infty$ esetén divergens sorozatot határoz meg. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, azaz divergens.

16) $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dots+\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$, így $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

17) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-1} \to -1$, ha $n\to\infty$.

18)

$$a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2} - \frac{n}{2} =$$
$$= \frac{n^2+n-n^2-2n}{2(n+2)} = \frac{-n}{2(n+2)} = \frac{-1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)} \to -\frac{1}{2}, \text{ ha } n \to \infty.$$

19)

$$a_n = \frac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} =$$
$$= \frac{1}{6}\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ ha } n \to \infty.$$

20)

$$a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} =$$
$$= \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}}\left(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}\right) =$$
$$= \frac{n^2-n+1-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{2}{1+1} = 1, \text{ ha } n \to \infty.$$

21)

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - 1} \to \frac{1}{2}, \text{ ha } n \to \infty.$$

22)

$$a_n = n\left(\sqrt{n^2-1} - n\right) = \frac{n\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}{\sqrt{n^2-1}+n} =$$
$$= \frac{n(n^2-1-n^2)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1} \to -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}, \text{ ha } n \to \infty.$$

23) $a_n = nq^n$, ha $|q| < 1$

Legyen $q = \dfrac{1}{1+p}$ $(p > 0)$, ekkor $nq^n = \dfrac{n}{(1+p)^n}$.

Mivel $(1+p)^n > 1 + np + \binom{n}{2}p^2$, így

$$\frac{n}{(1+p)^n} < \frac{n}{1+np+\dfrac{n(n-1)}{2}p^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{n}+p+\dfrac{n-1}{2}p^2} \to 0, \text{ ha } n \to \infty,$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(1+p)^n} = 0$; ezért $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

24) $a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + q_n$, ahol q_n pozitív tagú sorozat

$$n = (1+q_n)^n > 1 + nq_n + \binom{n}{2}q_n^2 = \frac{n^2-n}{2}q_n^2$$

ezért

$$q_n^2 < \frac{2n}{n^2-n} = \frac{2}{n-1} \to 0, \text{ ha } n \to \infty,$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^2 = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

25) Konvergens-e az $a_n = \sqrt[n]{a}$ sorozat, ha $a > 0$?

a) Ha $a > 1$, akkor $\sqrt[n]{a} = 1 + p_n$, ahol $p_n > 0$. Ekkor

$$a = (1+p_n)^n \geq 1 + np_n$$

így

$$\frac{a-1}{n} \geq p_n, \text{ vagyis } p_n \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

b) Ha $0 < a < 1$, akkor $p > 1$-re $a = \dfrac{1}{p}$. Tehát

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{p}} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

26) $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = \dfrac{n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \dfrac{n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{\infty}{e} = \infty$, tehát a_n divergens.

27)

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n \to \left(\frac{1}{e}\right)^n \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

28) A következő két sorozatnál határozzuk meg azt a küszöbindexet, amelytől kezdve a sorozat minden elemének a sorozat határértékétől való eltérése kisebb, mint 10^{-4}.

a) $a_n = \{0{,}5;\ 0{,}55;\ 0{,}555;\ 0{,}5555;\ \dots\}$
A sorozat korlátos (felső korlát lehet például 0,56 vagy 0,556) és növekvő, tehát konvergens. Mivel

$$0{,}5555 < \lim_{n\to\infty} a_n < 0{,}5556;$$

így az a_n-től való eltérés kisebb, mint $0{,}0001 = 10^{-4}$. Tehát $N = 4$.

b) $a_n = \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \dots\right\}$
A sorozat n-edik tagja: $2 + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n+1}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, így

$$|2 - a_n| = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{10\,000}$$

azaz $n \le 9999$. Tehát $N = 10\,000$.

29) $a_n = \dfrac{c^n}{n!}$, ahol c tetszőleges valós szám.

Állítás: A sorozat konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás:

$\mathbf{c = 0}$ **esetén**. az állítás nyilvánvaló.

$\mathbf{c < 0}$ **esetén**. $\left|\dfrac{c^n}{n!}\right| = \dfrac{|c^n|}{n!} = \dfrac{|c|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to \infty$, abban az esetben, ha $c > 0$-ra bizonyított az állítás.

$\mathbf{c > 0}$ **esetén**. tegyük fel, hogy c az m és az $m+1$ egész számok között van: $m < c < m+1$. Ekkor

$$0 < \frac{c^n}{n!} = \frac{c^m}{m!} \cdot \underbrace{\frac{c}{m+1} \cdots \frac{c}{n}}_{\substack{\frac{c}{n} \text{ egynél kisebb szá-} \\ \text{mokkal szorozva } < \frac{c}{n}}} < \frac{c^m}{m!} \cdot \frac{c}{n} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

30) A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozatok valóban konvergálnak A-hoz; azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz adjunk meg egy N küszöbszámot!

a) $a_n = \dfrac{2n+5}{n-3}$ b) $b_n = \dfrac{2^n}{5 \cdot 2^n - 1}$

c) $c_n = \lg \dfrac{n+2}{n+3}$ d) $d_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{\frac{n}{2}}}$

Megoldások:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

$$\left|\frac{2n+5}{n-3} - 2\right| < \varepsilon \quad \text{mikortól teljesül?}$$

$$\left|\frac{2n+5-2n+6}{n-3}\right| = \frac{11}{n-3} < \varepsilon$$

$$\underbrace{\frac{11}{\varepsilon} + 3}_{N} < n$$

Tehát pl. $\varepsilon = 10^{-6}$ esetén $N = \dfrac{11}{10^{-6}} + 3 = 11\,000\,003$, azaz a $11\,000\,004$. tagtól kezdve a sorozat tagjai benne vannak a 2 határérték $\varepsilon = 10^{-6}$ sugarú környezetében.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{5}$

$$\left|\frac{2^n}{5 \cdot 2^n - 1} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{\frac{1}{5}}{5 \cdot 2^n - 1}\right| = \frac{1}{5(5 \cdot 2^n - 1)} < \varepsilon \quad \text{mikortól teljesül?}$$

$$\frac{1}{25\varepsilon} + 1 < 2^n \Longrightarrow \underbrace{\log_2\left(\frac{1}{25\varepsilon} + \frac{1}{5}\right)}_{N} < n$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

$$\left|\lg \frac{n+2}{n+3}\right| < \varepsilon \quad \text{mikortól teljesül?}$$

$\dfrac{n+2}{n+3} < 1$ miatt a logaritmus negatív, ezért

$$\lg \frac{n+2}{n+3} > -\varepsilon \Longrightarrow \frac{n+2}{n+3} > \frac{1}{10^{\varepsilon}} \Longrightarrow 1 - \frac{1}{n+3} > \frac{1}{10^{\varepsilon}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{1}{10^{\varepsilon}} > \frac{1}{n+3} \Longrightarrow \underbrace{\frac{10^{\varepsilon}}{10^{\varepsilon} - 1}}_{N} < n$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \sqrt{2}$

$$\left|\lg \frac{n+2}{n+3}\right| < \varepsilon \quad \text{mikortól teljesül?}$$

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} - \sqrt{2} \Longrightarrow \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \frac{\varepsilon + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon + 2}{2} \Longrightarrow n > \underbrace{\frac{2}{\varepsilon^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon}}_{N}$$

31) Konvergens-e az az a_n sorozat, amelyre minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik N küszöbszám, hogy $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ teljesül bármely $n > N$ esetén?

Megoldás: Nem, ellenpélda lehet a harmonikus sor: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Ugyanis, ekkor $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ fennáll, ha $\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{N} < n$, de a sorozat divergens.

32) Vizsgáljuk konvergencia szempontjából a következő sorozatokat:

$$\text{a)} \quad a_n = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} \qquad\qquad \text{b)} \quad b_n = \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Megoldások:

a) $-1 \le \sin n\frac{\pi}{2} \le 1$, így a rendőr-elv miatt a sorozat 0-hoz tart.

b) $\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^n \ge 1 + n\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n}$ a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, így a sorozat divergens.

33) Vizsgáljuk monotonitás és korlátosság szempontjából a következő sorozatokat:

$$\text{a)} \quad a_n = \frac{2n^2+1}{n^2-n+1} \qquad \text{b)} \quad b_n = \frac{10n}{\sqrt{n^2-1}} \qquad \text{c)} \quad c_n = \frac{n!}{n^5}$$

$$\text{d)} \quad d_n = \frac{(-3)^n}{4\sqrt[4]{n}+2} \qquad \text{e)} \quad e_n = \frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{5}}$$

Megoldások:

a) **Monotonitás:** $a_{n+1} - a_n \lesseqgtr 0$ alapján:

$$\frac{2(n+1)^2+1}{(n+1)^2-(n+1)+1} - \frac{2n^2+1}{n^2-n+1} = \frac{2n^2+4n+3}{n^2+n+1} - \frac{2n^2+1}{n^2-n+1} =$$

$$= \frac{(2n^2+4n+3)(n^2-n+1)-(2n^2+1)(n^2+n+1)}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} = \frac{-2n^2+2n+2}{n^4+n^2+1},$$

aminek a számlálója n növekedtével negatív, nevezője pozitív, így a tört negatív. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Korlátosság: A sorozat korlátos, mert konvergens (korlátok lehetnek például 3,5 és 2).

b) **Monotonitás:** $b_{n+1} - b_n \lesseqgtr 0$ alapján:

$$\frac{10(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2-1}} - \frac{10n}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{10(n+1)\sqrt{n^2-1}-10n\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2+2n}\cdot\sqrt{n^2-1}}$$

aminek a nevezője mindig pozitív, tehát a számláló dönti el az előjelet:

$$\sqrt{(n^2+2n+1)(n^2-1)} - \sqrt{n^4+2n^3} = \sqrt{n^4+2n^3-2n-1} - \sqrt{n^4+2n^3}$$

n növekedtével negatív, így a tört negatív. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Korlátosság: A sorozat korlátos, mert konvergens (korlátok lehetnek például 12 és 10).

c) **Monotonitás:** $c_{n+1} - c_n \lesseqgtr 0$ alapján:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^5} - \frac{n!}{n^5} = \frac{n^5(n+1)!-(n+1)^5 n!}{[(n+1)n]^5} = \frac{(n+1)!\,(n^5-(n+1)^4)}{(n^2+n)^5}.$$

A számláló és a nevező is pozitív, így a sorozat szigorúan monoton növekvő.

Korlátosság: A sorozat nem korlátos, ugyanis

$$\frac{n!}{n^5} = \frac{(n-1)!}{n^4} > \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^4} =$$

$$= \frac{n^5-15n^4+85n^3-225n^2+274n-120}{n^4} > \frac{n^5-15n^4}{n^4} = n-15,$$

tehát felső korlát nincs. Alsó korlát lehet például 1.

d) **Monotonitás:** A sorozat tagjai felváltva negatívak illetve pozitívak, ezért az $d_{n+1} - d_n$ különbség hol negatív, hol negatív. Tehát a sorozat nem monoton.

Korlátosság: A sorozat nem korlátos, ugyanis

$$\left|\frac{3^n(-1)^n}{4\sqrt[4]{n}+2}\right| = \frac{3^n}{4\sqrt[4]{n}+2} > \frac{3^n}{5\sqrt[4]{n}} > \frac{3^n}{5n} \to \infty, \text{ ha } n \to \infty,$$

hiszen $0 < q < 1$ esetén $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$.

e) **Monotonitás:**

$$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{5}} = \frac{n!}{4!\,(n-4)!} \cdot \frac{5!\,(n-5)!}{n!} = \frac{5}{n-4}$$

miatt a sorozat $n > 5$-re szigorúan monoton csökken.

Korlátosság: A sorozat korlátos, mert konvergens (korlátok lehetnek például 5 és -3).

34) Mi a következő sorozatok határértéke?

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$ b) $b_n = \dfrac{n}{3^n}$

c) $c_n = \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}}$ d) $d_n = \sqrt[n]{5n^2-30n+21}$ $(n \geq 2)$

e) $e_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^n$ f) $f_n = \left(2-\dfrac{1}{n}\right)^n$

g) $g_n = \left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$

Megoldások:

a) $\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1$, ha $n \to \infty$.

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^n} < \dfrac{n}{3^n} < \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, így a rendőr-elv miatt a sorozat $n \to \infty$ esetén 0-hoz tart.

c) $\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}} <= \sqrt[n]{n}$, így a rendőr-elv miatt a sorozat $n \to \infty$ esetén 1-hez tart.

d) $\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{5n^2 - 30n + 21} < \sqrt[n]{5n^2} = \sqrt[n]{5}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}$, így a rendőr-elv miatt a sorozat $n \to \infty$ esetén 1-hez tart.

e)

$$\left(\frac{3n+2-3}{3n+2}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{\frac{3n+2}{3}}\right)^{2n} = \left\{\left[\left(1 - \frac{1}{\frac{3n+2}{3}}\right)^{\frac{3n+2}{3}}\right]^{\frac{3}{3n+2}}\right\}^{2n} =$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{3n+2}{3}}\right)^{\frac{3n+2}{3}}\right]^{\frac{6}{3+\frac{2}{n}}} \longrightarrow e^{-2}, \text{ ha } n \to \infty.$$

f) $2^n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = 2^n\left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} \to \infty \cdot e^{-\frac{1}{2}}$, ha $n \to \infty$.

g) $$\left(1 + \frac{2}{2^n+1}\right)^n = \left\{\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2^n+1}{2}}\right)^{\frac{2^n+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2^n+1}}\right\}^n \to e^{\frac{2n}{2^n+1}} \to e^0 = 1,$$

ha $n \to \infty$.

Feladatok

1) Tanulmányozzuk az ε-os konvergencia kritérium alapján a következő általános tagú sorozatok konvergenciáját. Ha konvergens a sorozat, akkor határozzuk meg a határértékűket és a küszöbszámot.

a) $a_n = \frac{1}{n}$, *b)* $b_n = n^2$ *c)* $c_n = 0{,}99\ldots 9$, (n db 9-es)

d) $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$, *e)* $e_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ *f)* $f_n = \frac{2n-1}{n}$

g) $g_n = \frac{3n-1}{2n+1}$ *h)* $h_n = \frac{2n^2-3n+3}{5n}$ *i)* $i_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

2) A Cauchy-féle konvergenciakritérium segítségével igazoljuk, hogy az

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

általános tagú sorozat divergens.

3) Hasonlítsuk az előbbi feladatban szereplő $(s_n)_{n>0}$ sorozatot egy divergens sorozathoz úgy, hogy abból következtethessünk az $(s_n)_{n>0}$ sorozat divergenciája.

4) Vizsgáljuk meg, hogy a következő általános tagú sorozatok konvergensek-e. Ha konvergensek akkor számítsuk ki a határértéküket.

$$a)\ a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n},\quad b)\ b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}-n},\quad c)\ c_n = n(\sqrt{n^2-1}-n),$$

$$d)\ d_n = \sqrt[3]{n^6+1}-n^2,\quad e)\ e_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n},\quad f)\ f_n = \frac{\sqrt[3]{2n+1}}{\sqrt[3]{3n+1}-\sqrt[3]{2n}}.$$

5) Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{3n^2-1},\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{-2n-5}{7n+3},\quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3}{4n-1},$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1},\quad e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+n+1},\quad f)\ \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^5+1}{5n^3+n^2-n}.$$

6) Számoljuk ki az $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$ határértéket $k = 0,1,2,3,4$ esetén.

7) Igazoljuk, hogy az $s_n = 1+\dfrac{1}{2^k}+\ldots+\dfrac{1}{n^k}$ sorozat konvergens minden $k>1$ természetes szám esetén.

8) Számoljuk ki az $a_n = nq^n$ sorozat határértékét, ha $|q|<1$.

9) Számoljuk ki a következő általános tagú sorozatok határértékeit:

$$a)\ a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{3\sqrt{n}+2},\quad b)\ b_n = \frac{\sqrt[3]{2n}+\sqrt{3n}+1}{\sqrt[3]{n}+\sqrt{5n}+1},$$

$$c)\ c_n = \frac{\sqrt[3]{n}-1}{\sqrt[5]{n}+1},\quad d)\ d_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt{n^2+5}}.$$

10) Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5\cdot 2^n-1},\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n},$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+4^n}{n3^n},\quad d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-5^n}{n5^n-n^24^n}.$$

11) A fogó tételt alkalmazva számoljuk ki a következő általános tagú sorozatok határértékeit:

a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

b) $b_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+n}$;

c) $c_n = \dfrac{n^2}{n^3+1} + \dfrac{n^2}{n^3+2} + \ldots + \dfrac{n^2}{n^3+n}$;

d) $d_n = \sqrt[n]{n}$;

e) $e_n = \dfrac{n}{2^n}$;

f) $f_n = \dfrac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n^2}$;

g) $g_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$.

12) Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \right) = \ln 2$.

13) Számítsuk ki az $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} n \cos n$ határértékeket.

14) Számítsuk ki a következő határértékeket:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+n+1} \right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\sqrt{n}}{n+3\sqrt{n}+2} \right)^{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{n} \right)^n$$

15) Igazoljuk a következő állításokat, ha $(x_n)_{n>0}$ egy nullához tartó sorozat ($x_n > -1$ minden n esetén) és $a > 0$:

$$\lim_{n\to 0} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to 0} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a, \quad \lim_{n\to 0} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

16) Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$\lim_{n\to\infty} \lg\frac{n+2}{n+3}, \quad \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n})^n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\frac{2^n+3^n}{4^n},$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^3+n-1}{n^2-2}}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\ln n} \quad \lim_{n\to\infty} 2^{\ln n^2}.$$