MŰEGYETEM 1782

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Matematika Intézet

A Matematika A1a tárgy gyakorlati anyaga

vegyész, környezetmérnök és biomérnök hallgatóknak

Összeállította: Ruzsa Zoltán

Szerkesztette: Nagy Ilona

BME Budapest

2013

1. feladatsor: halmazok, komplex számok

1. Így szokás halmazokat definiálni: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$. Definiáljuk:
   a) 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza,
   b) racionális; irracionális számok halmaza,
   c) a négyzetszámok halmaza,
   d) a második síknegyed pontjai,
   e)$^{\text{hf}}$ páros számok halmaza,
   f)$^{\text{hf}}$ prímszámok halmaza,
   g)$^{\text{hf}}$ az egységsugarú gömbön belüli pontok,
   h)$^{\text{hf}}$ harmadfokú polinomok halmaza.

2. Fogalmazzuk meg, hogy mit mondanak a következő állítások. Melyek igazak és melyek nem a valós számok körében? Írjuk fel az állítások tagadását!
   a) $\forall x\ \exists y\ (y > x)$
   b) $\exists a\ \forall b\ (b^a > 0)$
   c) $p > 0 \Rightarrow \left[\exists q\ (p = q^2)\right]$
   d)$^{\text{hf}}$ $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x = y^z)$
   e)$^{\text{hf}}$ $x > 0 \Leftrightarrow \left[\exists y\ (y > 0\ \wedge\ x - y > 0)\right]$
   f)$^{\text{hf}}$ $\left[x \in \mathbb{N}\ \wedge\ y \in (\mathbb{N} \setminus \{1, x\})\right] \Rightarrow x/y \notin \mathbb{N}$

3. Legyen $z = 1 - 4i$. Mi lesz $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$?

4. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:
   a) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 2\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| > 3\}$
   c) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < -2\}$
   d) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - 3| = 2\}$
   e) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z + i| = |z - 2|\}$
   f) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im} z > 3\}$
   g) $\{z \in \mathbb{C}\ :\ 1 < \arg z < 2\}$
   h)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z + 2i| = \pi\}$
   i)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z + i| \geq |z|\}$
   j)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$
   k)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ -3 > \operatorname{Re} z \geq 0\}$
   l)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C}\ :\ z = \bar{z}\}$

5. Mi lehet z, ha
   a) $\bar{z} - z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$
   b) $\operatorname{Im} z = 1$, $|z| = \sqrt{2}$
   c)$^{\text{hf}}$ $\arg z = 3\pi/4$, $\operatorname{Re} z = 5$
   d)$^{\text{hf}}$ $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $|z - 2| = 3$

6. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$ alakba!
   a) $(1 + 4i)(4 - 2i)$
   b) i^7
   c) $\dfrac{3 - 2i}{-2 + i}$
   d) $\dfrac{3 - 2i}{3i}$
   e)$^{\text{hf}}$ i^{2009}
   f)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{1}{i}$
   g)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{2 - i}{i - 1}$
   h)$^{\text{hf}}$ $(2 + i)^{37}(2 - i)^{38}$

Emlékeztető

– Logikai jelek: $\forall$ minden; $\exists$ létezik; $\exists!$ létezik egyetlen; $\wedge$ és; $\vee$ vagy; $\neg$ nem; $\Rightarrow$ következik; $\Leftrightarrow$ ekvivalens;
Halmazok: $\mathbb{N}$ természetes számok; $\mathbb{Z}$ egészek; $\mathbb{Q}$ racionálisok; $\mathbb{R}$ valós számok; $\emptyset$ üres halmaz.

– A *komplex számok* a $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alakú számok, ahol $i = \sqrt{-1}$. Az itt szereplő a a szám *valós része*, azaz $\operatorname{Re}(z) = a$, míg b az *imaginárius*, vagy *képzetes része*, azaz $\operatorname{Im}(z) = b$.
Minden 0-tól különböző komplex szám alkalmas $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$-vel egyértelműen írható $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ alakba. Itt r a szám *abszolút értéke*, azaz $|z| = r$, φ az *argumentuma*, azaz $\arg(z) = \varphi$.
Egy $z = a + ib$ komplex szám *konjugáltja*: $\bar{z} = a - ib$.

2. feladatsor: komplex számok, n-edik gyökvonás

1. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:
   a) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(z+1) = |z-1|\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| > 5, \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)\}$
   c)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < |z-2i|, |z-i| \leq 1\}$
   d)$^{\text{hf}}$ $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z+i| + |z+3| = 7\}$

2. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$, esetleg $r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ alakba!

a) $(1-i)^{997}$	b) $\sqrt{2}$	c) $\sqrt{i}$
d) $\sqrt[3]{1}$	e) $\sqrt[3]{1+i}$	f)$^{\text{hf}}$ $\sqrt[3]{27i}$
g)$^{\text{hf}}$ $(1+i\sqrt{3})^{100}$	h)$^{\text{hf}}$ $\sqrt{\dfrac{i}{i-3}}$	i)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{\sqrt{i}}{1-i}$

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a komplex számok körében. Az egyenletekben szereplő polinomoknak írjuk fel a gyöktényezős felbontását!
   a) $z^2 - iz + 3 + 2i = 0$
   b) $z^3 - 8 = 0$
   c)$^{\text{hf}}$ $\bar{z} - z = 0$
   d)$^{\text{hf}}$ $3z^2 - iz^2 + 3iz + 6 - i = 0$
   e)$^{\text{hf}}$ $z^6 + 16z^2 = 0$

4. Adjuk meg az összes olyan z komplex számot, amelyre
   a) $\mathrm{Re}(z) + 2\,\mathrm{Im}(z) = 0$ és $\mathrm{Re}(z^2) - 2\,\mathrm{Im}(z) = 1$
   b) $z^2 + \bar{z} = 0$
   c)$^{\text{hf}}$ $\mathrm{Re}(z^2) = 2\,\mathrm{Im}(z)$ és $\mathrm{Im}(z^2) = 2\,\mathrm{Re}(z)$

5. Hány komplex gyöke lehet egy hetedfokú valós együtthatós polinomnak?

6. Egy szabályos hatszög egyik csúcsa $2+i$, középpontja $3+2i$. Írjuk fel a többi csúcsát!

7.$^{\text{hf}}$ Van-e olyan z komplex szám, amelyre $\bar{z}^2$, (azaz $(\bar{z})^2$) és z^{-2} (azaz $(z)^{-2}$) egyenlő?

8.$^{\text{hf}}$ Hol a hiba? $\quad -1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1\cdot 1} = \sqrt{1}\sqrt{1} = \left(\sqrt{1}\right)^2 = 1$

Emlékeztető

– $(r\cos\alpha + ri\sin\alpha)(s\cos\beta + si\sin\beta) = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

– $\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)$ ahol $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1)$

3. feladatsor: sorozatok határértéke

1. Állapítsuk meg, hogy nullsorozat-e! Ha igen, akkor oldjuk meg a *közelítés alapfeladatát*, azaz a definíció alapján keressünk N küszöböt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz.

   a) $a_n = 0$ b) $b_n = \dfrac{1}{n}$ c) $c_n = (-1)^n$

   d) $d_n = \dfrac{1}{n^2}$ e)hf $e_n = \sin n$ f)hf $f_n = \dfrac{(-1)^n}{\log_{10} n}$

2. Határozzuk meg a határértékeket, és keressünk N küszöböt ε-hoz a definíció alapján!

   a) $\lim \dfrac{3n-1}{4n+99}$ b) $\lim \dfrac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1}$ c) $\lim \dfrac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1}$

   d)hf $\lim \dfrac{7n+4}{2n-1}$ e)hf $\lim \dfrac{5n^3-2}{n^3+3}$ f)hf $\lim \dfrac{n-6}{6n^2+16}$

3. Íjuk fel formulával (minél kevesebb zárójellel) az a_n sorozatra vonatkozó állításokat:
   a) a_n korlátos,
   b) a_n monoton növekvő,
   c)hf $a_n \not\to a$,
   d)hf a_n divergens.

4. Számítsuk ki az $a_n = \left(\sqrt{n^2+n-3} - n\right)$ sorozat határértékét, és keressünk N küszöbindexet az $\varepsilon = 0.01$ hibahatárhoz! Bizonyítsuk be, hogy tényleg annyi a határérték!

5.hf Egy egyre pontosodó mérési sorozat n-edik mérésének eredménye $a_n = 1 + (-1)^{n+1}2^{3-n}$. Hányadik mérés után csökken a mért mennyiség és a mért érték eltérése (azaz a hiba) $\varepsilon = 10^{-4}$ alá?

6. Vizsgáljuk konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat:

   a) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{(5-2n)n!}$ b) $b_n = \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$

7.hf A gonosz varázsló mindennap arannyá változtatja a Földön lévő vízmennyiség felét. Mennyi idő múlva csökken a vízkészlet 1 pohárnyi alá? (A Földön kb. $1386 \cdot 10^6$ km^3 víz van.) Mennyi idő múlva marad csak 1 vízmolekula?

Emlékeztető

– Az $a_1, a_2, \ldots a_k, \ldots$ valós számokból álló *sorozatot* (a_n) jelöli.

– Az a_n sorozat *nullsorozat*, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n| < \varepsilon$. Ezt kétféleképp lehet jelölni: $a_n \to 0$ vagy $\lim a_n = 0$.

– Az a_n sorozat *határértéke az a szám*, jelölve $a_n \to a$ vagy $\lim a_n = a$, ha $a_n - a$ nullsorozat. Ekkor a_n *konvergens*, különben *divergens*.
(Közvetlenül ez így is fogalmazható: $\lim a_n = a$, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.)

4. feladatsor: sorozatok határértéke

1. Vizsgáljuk: korlátosság, supremum, infimum, határérték.

   a) $\dfrac{\cos(n\pi)}{n}+(-1)^{n+1}$ b) $(-2)^n+\dfrac{1}{n!}$ c)[hf] n^{-n} d)[hf] $n^{(-1)^n}$

2. Mennyi lehet $\lim a^n$ értéke (a-tól függően, $a\in\mathbb{R}$)?

3. Számoljuk ki a határértékeket:

   a) $\lim \dfrac{n^{-1}}{1+n^{-2}}$ b) $\lim \dfrac{n^5-216n^2+n-2}{-n^8+500n^4+86}$

   c) $\lim \dfrac{n^{22}+18n^{18}}{8n^{22}-4n^2}$ d) $\lim \dfrac{2^n+82n^{47}+23610}{-14n^{25}+2n^8+3}$

   e) $\lim \dfrac{5^n+401n+402}{2^{2n}+n-88}$ f) $\lim \dfrac{25n!+n^{25}}{25n^n}$

   g) $\lim\left(\sqrt{4n-3}-\sqrt{n+9}\right)$ h) $\lim\left(\sqrt{2n^2+5n}-\sqrt{2n^2-n}\right)$

   i) $\lim\left(\sqrt{n^4+2n}-n^2\right)$ j) $\lim \dfrac{1}{n-\sqrt{n^2+3n+5}}$

4. Igaz? Hamis?

   a) ha $a_n\to a$, akkor $a_n^2\to a^2$ b) ha $a_n^2\to a^2$, akkor $a_n\to a$

   c) ha $a_n>0$ és $b_n\to\infty$, akkor $a_nb_n\to\infty$ d) $a_n\to 0 \;\Rightarrow\; 1/a_n\to\infty$

   e) $a_n\to\infty \;\Rightarrow\; 1/a_n\to 0$ f) [$a_n>0$ és a_n konvergens] $\Rightarrow \lim a_n>0$

   g) [a_n korlátos, $b_n\to 0$] $\Rightarrow\; a_nb_n\to 0$

5.[hf] Számoljuk ki a következő határértékeket:

   a) $\lim \dfrac{n^{2/3}+8n^{\sqrt{3}}+\sqrt{n}+12}{n^2+5n-7}$ b) $\lim \dfrac{n^{-2}+4}{2n^{-3}-1}$

   c) $\lim \dfrac{9\sqrt[3]{n}-3\sqrt{2n}+1}{\sqrt[4]{n}+\sqrt{3n}}$ d) $\lim \dfrac{\log_{10}(n^2)+3}{\log_3(n)-1}$

   e) $\lim \dfrac{(-3)^{n+1}+2^{2n+3}}{8+5^n}$ f) $\lim \dfrac{n^3\cdot 2^n+3^n}{2^{2n}-3n^2}$

   g) $\lim \dfrac{4^{n-1}+n^5\cdot 3^{n+3}}{2^{2n+3}+2^{n-3}}$ h) $\lim \dfrac{7^n+n^7+7}{2^{2n}+(2n)^2+2}$

   i) $\lim\left(\sqrt{9n^2+7}-\sqrt{9n^2+2n+5}\right)$ j) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-3n+3}-\sqrt[3]{n^3+123n^2-1}\right)$

6.[hf] Legyen $p(x)$ és $q(x)$ egy-egy polinom. Adjunk módszert $\lim \dfrac{p(n)}{q(n)}$ meghatározására!

Emlékeztető

– Ha a_n divergens, de $\forall K$-hoz $\exists N\in\mathbb{N}$, hogy $n>N$ esetén $a_n>K$, akkor $a_n\to\infty$.

– Egy $H\subset\mathbb{R}$ halmaz *infimuma* (azaz $\inf H$) a H halmaz alsó korlátjai közül a legnagyobb.
H *supremuma* (azaz $\sup H$) pedig H felső korlátjai közül a legkisebb.
H *minimuma* l, ha $l\in H$ és $l=\inf H$. H *maximuma* h, ha $h\in H$ és $h=\sup H$.
Egy sorozat infimuma, supremuma az elemei által alkotott halmaz infimuma, supremuma.

5. feladatsor: speciális sorozatok, numerikus sorok

1. Számoljuk ki:

a) $\lim \left(1-\dfrac{3}{n^3}\right)^{n^3}$ b) $\lim \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{n-3}$ c) $\lim \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+7}$

d) $\lim \left(\dfrac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n}$ e) $\lim \left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{\frac{n}{2}+1}$ f) $\lim \dfrac{\left(5-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(5+\frac{1}{n}\right)^n}$

g)$^{\text{hf}}$ $\lim \left(1+\dfrac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}$ h)$^{\text{hf}}$ $\lim \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$ i)$^{\text{hf}}$ $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

2. Felhasználva hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$ és $\sqrt[n]{p} \to 1$ $(p>0)$, számoljuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim \sqrt[2n]{2n}$ b) $\lim \sqrt[n]{2n}$ c) $\lim \sqrt[2n]{n}$ d) $\lim \sqrt[n]{99n^{99}}$

e) $\lim \sqrt[n]{n+5}$ f) $\lim \sqrt[n]{2n^3+3}$ g)$^{\text{hf}}$ $\lim \sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{4n^2+n}}$ h)$^{\text{hf}}$ $\lim \sqrt[n^2]{n}$

3.$^{\text{hf}}$ A plutónium-238 felezési ideje 87.7 év. Jelöljük a_n-el egy gyártáskor 50 kilogramm Pu-238-at tartalmazó atombombában n év eltelte után maradó Pu-238 tömegét. Írjuk fel az a_n sorozatot! Hányadik évben fog a Pu-238 tömege 0.1 kilogramm alá csökkenni?

4. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ c)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

5. Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{5^n}$

d)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{3n+1}+(-5)^n}{3^{2n+2}}$ e)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^{n+1}}{3^{2n+1}}$ f)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{3n-1}-2^n}{4^{2n-1}}$

Emlékeztető

– A *rendőrszabály* vagy *csendőrelv*: Ha $a_n \le b_n \le c_n$, és $\lim a_n = \lim c_n = h$, akkor $b_n \to h$ is.

– Előadáson szerepelt, hogy az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, és a határértékére bevezettük az e jelölést. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\lim \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

– Ha (a_n) egy sorozat, akkor a $\sum a_n$ szimbólum neve *sor*. A sor *összege*: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)$. Ez a határérték nem mindig létezik. Ha létezik és véges, akkor a sor *konvergens*.

– A geometriai sor összege: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$, ha $|q|<1$.

6. feladatsor: numerikus sorok

1. Mely α-ra konvergens, melyre divergens a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sor?

2. Konvergens? (Használjuk a majoráns, minoráns kritériumokat.)

a) $\sum \frac{2n+1}{n^2}$ b) $\sum \frac{5n+2}{n^7}$ c) $\sum \frac{7n^3-7}{n^5+2n^4}$ d) $\sum \frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7}$

e)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{2^n+3^{n+1}}{1+6^{n-1}}$ g)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ h)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

3. Konvergens? (Használjuk a hányados- és gyökkritériumot.)

a) $\sum \frac{7^{n-2}}{(n+1)!}$ b) $\sum \frac{5^{3n}}{n^4}$ c) $\sum \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$

d) $\sum \frac{2^{2n}}{n^5 2^{3n+1}}$ e)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{2^{3n}n^7}{3^{2n+1}}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{(n+5)\cdot 3^{n-1}}{5^{n+1}}$

g)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{(n+2)\cdot 4^{n-1}}{(n+5)\cdot n!}$ h)$^{\text{hf}}$ $\sum \frac{(n+1)!}{n^n}$ i)$^{\text{hf}}$ $\sum \left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^{n^2}$

4. Igaz? Hamis?

a) $\sum a_n$ konvergens $\Rightarrow \lim a_n = 0$ b) $\lim a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ konvergens

c) $\sum a_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n^2$ konvergens

5.$^{\text{hf}}$ Lássuk be, hogy 0.123123123123... racionális szám, és írjuk fel mint két egész szám hányadosa.

6. Konvergens? Abszolút konvergens?

a) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ c) $\sum (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}$

d)$^{\text{hf}}$ $\sum (-1)^n \frac{2^n}{3^n+1}$ e)$^{\text{hf}}$ $\sum (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{3n-2}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n$

Emlékeztető

– *Majoráns kritérium*: Ha $0 \le a_n \le b_n$, és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is.

– *Minoráns kritérium*: Ha $0 \le a_n \le b_n$, és $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is.

– *Gyökkritérium (Cauchy)*: Legyen $a_n \ge 0$, és $w = \lim \sqrt[n]{a_n}$. Ha $w < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens; ha $w > 1$, akkor divergens; míg ha $w = 1$, akkor bármi előfordulhat.

– *Hányadoskritérium (D'Alembert)*: Legyen $a_n \ge 0$, $w = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ha $w < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens; ha $w > 1$, akkor divergens; míg ha $w = 1$, akkor bármi előfordulhat.

– Egy $\sum a_n$ sor *Leibniz-sor*, ha $|a_n|$ mon. csökkenő, $\lim a_n = 0$, és a_n előjele váltakozó. Tétel *(Leibniz-kritérium)*: Minden Leibniz-sor konvergens.

7. feladatsor: határértékszámolás, folytonosság

1. A definíció alapján határozzuk meg a határértékeket. Számoljuk ki, hogy x-nek mennyire kell közel lennie x_0-hoz ahhoz, hogy a függvényérték a határértéket legalább $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal megközelítse.

   a) $\lim\limits_{x\to 4} 3x-1$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2(x^2-1)}{x+1}$

   d) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1-2x}{x+3}$ e)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{8-2x^2}{x+2}$ f)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{1-5x}$

2. Definiáljuk a következő fogalmakat:

   a) $\lim\limits_{x\to 7+} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$

3. Számoljuk ki a határértékeket:

   a) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^9+4x^6+1)$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)^2}$

   d) $\lim\limits_{x\to 5+} \dfrac{[6-x]}{2+\{3x\}}$ e) $\lim\limits_{x\to 5-} \dfrac{[6-x]}{2+\{3x\}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x}$

   g)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ h)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$ i)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}+x}$

   j)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{4+x}-2}$ k)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^3-1}\right)$ l)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5}$

4. Számoljuk ki a határértékeket:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 9x^2}{x^2}$

   d)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x^2}{\operatorname{tg} 3x^2}$ e)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x-\sin 8x}{7x+\sin 2x}$ f)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

5.$^{\text{hf}}$ Ábrázoljuk a függvényeket, majd határozzuk meg a határértékeket.

   a) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin x$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x}\sin x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

6.$^{\text{hf}}$ Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, amely

   a) minden pontban folytonos b) semely pontban sem folytonos

   c) pontosan egy pontban nem folytonos d) pontosan egy pontban folytonos

Emlékeztető

– Egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek *a határérétéke x_0-ban a*, (jelölésben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$), ha minden $(x_n)\to x_0$, $x_i\neq x_0$ sorozat esetén $f(x_n)\to a$. Ekvivalens definíció: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta$, hogy $|x-x_0|<\delta$, és $x\neq x_0$ esetén $|f(x)-a|<\varepsilon$.

– *f folytonos az x_0 pontban*, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. *$f$ folytonos*, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

8. feladatsor: differenciálszámítás

1. Hol deriválhatóak a következő függvények? Adjuk meg a deriváltakat!

a) x^7 b) $|x|$ c) $1/x^{111}$ d) $x^{-7}\sqrt[5]{x}$

e) $\sin x^3$ f) $\operatorname{ctg} x$ g) $x \sin x$ h) 7^x

i) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^7+2x+1}$ j) $\dfrac{\sin x}{x^3} + e^x \cos x$ k) $\sin^5(x^3)$ l)$^{\text{hf}}$ $\operatorname{sgn} x$

m)$^{\text{hf}}$ $x \sin x \cos x$ n)$^{\text{hf}}$ $\log_3 x$ o)$^{\text{hf}}$ $\log_x x$ p)$^{\text{hf}}$ $(x^3-3x+8)^7$

q)$^{\text{hf}}$ $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{1+2x^2}}$ r)$^{\text{hf}}$ $(\sin^3(x)+2)^7$ s)$^{\text{hf}}$ x^x t)$^{\text{hf}}$ $(\sin x)^{\cos x}$

2. a) Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Mutassuk meg, hogy $f'(0)$ nem létezik!
b) Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sin \sqrt[3]{x}$. $f'(x) = ?$ ($x = 0$-ban használjuk a definíciót.)
c)$^{\text{hf}}$ Legyen $f(x) = |x-1| \cdot \sin(2x-2)$. $f'(x) = ?$ ($x = 1$-ben használjuk a definíciót.)

3. Legyen $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$, ha $x \neq 1$ és $f(1) = \beta$.
a) Megválasztható-e β értéke úgy, hogy az f függvény folytonos legyen $x = 1$-ben?
b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 1$
c) $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = ?$ Létezik-e $f'(1)$?

4. Írjuk fel az alábbi függvények grafikonjának x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintőegyenes egyenletét!
a) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$; b) $f(x) = \ln 3x$, $x_0 = e^2/3$;
c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$; d)$^{\text{hf}}$ $f(x) = 1 + \sin(xe^{2x+1})$, $x_0 = 0$.

5. Milyen α és β mellett deriválható?

a) $f(x) = \begin{cases} \alpha + \cos x & \text{ha } x > 0 \\ \beta x & \text{különben} \end{cases}$ b)$^{\text{hf}}$ $g(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x) & \text{ha } x > 0 \\ x + \beta & \text{különben} \end{cases}$

6. Pista ceruzájának a hegye a $(4,0)$ pontban van, és innen érintőegyenest szeretne húzni az $f(x) = x^2/3$ függvényhez. Hány fokos szögben kell elindítania a ceruzáját?

7.$^{\text{hf}}$ Van-e az $f(x) = x^2 - 1$ parabolának olyan érintője, amely átmegy a $(2,2)$ ponton? Ha igen, írjuk fel az érintő egyenletét!

8.$^{\text{hf}}$ Ha a holdon felfelé elhajítanánk egy követ 24m/s kezdősebességgel, akkor t másodperc múlva $24t - 0.8t^2$ magasan lenne.
a) Írjuk fel a kő sebességét az idő függvényében. b) Milyen magasra repül a kő?
c) Mekkora a holdon a gravitációs gyorsulás? d) Mennyi idő alatt esik vissza?

Emlékeztető

– Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezve van x_0 egy környezetében, akkor a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ számot (amennyiben létezik és véges) f x_0-beli *deriváltjának* nevezzük, és $f'(x_0)$-val jelöljük.

– Az $x \mapsto f'(x)$ függvényt f *derivált függvényének*, vagy röviden *deriváltjának* nevezzük, és f'-vel jelöljük.

A deriválás alapszabályai

$c' = 0$

$(cf)' = cf'$ $\qquad$ $(cf(x))' = cf'(x)$

$(f+g)' = f' + g'$ $\qquad$ $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(fg)' = f'g + g'f$ $\qquad$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$ $\qquad$ $(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \qquad (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Az alapfüggvények deriváltjai

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\mathrm{ctg}x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{arcctg}x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $(a^x)' = a^x \ln a$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$ $\qquad$ $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \qquad (\mathrm{cth}x)' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$$

$$\left(\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \qquad \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}\right)$$

Függvényvizsgálat

az $[a,b]$ intervallumon $f' \geq 0$	$\Rightarrow$	f monoton növekszik $[a,b]$-n
az $[a,b]$ intervallumon $f' \leq 0$	$\Rightarrow$	f monoton csökken $[a,b]$-n
$f'(a) = 0$, és f' előjelet vált a-nál	$\Rightarrow$	f-nek lokális szélsőértéke van a-ban
az $[a,b]$ intervallumon $f'' \geq 0$	$\Rightarrow$	f konvex $[a,b]$-n
az $[a,b]$ intervallumon $f'' \leq 0$	$\Rightarrow$	f konkáv $[a,b]$-n
$f''(a) = 0$, és f'' előjelet vált a-nál	$\Rightarrow$	f-nek a inflexiós pontja

9. feladatsor: L'Hospital-szabály, szélsőérték-keresés

1. Milyen α, β-ra deriválhatóak a következő függvények?

   a) $\begin{cases} \alpha - \cos x & \text{ha } x > 0 \\ \beta x & \text{különben} \end{cases}$ b)$^{\text{hf}}$ $\begin{cases} \sin x & \text{ha } x > 0 \\ \alpha x + \beta & \text{különben} \end{cases}$ c)$^{\text{hf}}$ $\begin{cases} x^3 + \alpha & \text{ha } x > 1 \\ 2 - \beta x & \text{különben} \end{cases}$

2. Kiszámolandó határértékek:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-5x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} x$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x + \sin x}$ f)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

   g)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ h)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{x \cos x}{(2\pi - x)^2}$ i)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \sin x} \right)$

   j)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} \ln x^7$ k)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$ l)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x}$

   m)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ n)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

3. Keressük meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 5$ b)$^{\text{hf}}$ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 7$

4. Zsiga pálinkafőzdéje hetente x hordó pálinkát $x^3 - 6x^2 + 15x$ ezer forint költséggel képes előállítani, és y hordót $9y$ ezer forintért tud eladni. Mennyit kell termelnie, hogy maximális legyen a profitja?

5. Keressük meg a függvények adott intervallumon vett szélsőértékeit.

   a) $f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad I = [-3, 1]$ b) $f(x) = |x|, \quad I = (-1, 1)$

   c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \sin x, \quad I = [-1, 2]$ d)$^{\text{hf}}$ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, \quad I = [-1/2, 4)$

6.$^{\text{hf}}$ Ede akkora téglalap alakú folyóparti telket kap, amekkorát 1000 méternyi drótkerítéssel körül tud keríteni. (A folyópart egy egyenes, a teleknek erre kell illeszkednie. A telek folyóparti oldalára nem kell kerítés.) Milyen alakban kell felépítenie a kerítést, hogy a lehető legnagyobb területű legyen a telke?

7.$^{\text{hf}}$ Hogyan válasszunk két pozitív számot úgy, hogy az összegük 50 legyen, a szorzatuk pedig a lehető legnagyobb?
Hogyan válasszunk két pozitív számot, hogy a szorzatuk 50 legyen, az összegük pedig a lehető legnagyobb?

Emlékeztető

– A *L'Hospital-szabály*: Legyenek az f és g függvények differenciálhatóak az x_0 egy környezetében, és legyen itt $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$. Legyen továbbá $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ vagy $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$. Ha $\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)} = A$, akkor $\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = A$, ahol x_0 és A lehet valós szám vagy $\pm\infty$.

10. feladatsor: szöveges szélsőérték-feladatok

1. Egy téglalap alakú, 1×2 méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

2. Egy épülő atlétikapályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen, és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

3. A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x-szeresére való növelését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x-1)^2$ százaléka nem fog hinni neki, viszont a maradék szavazók $50(x-1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszoros bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?

4. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Maximum mennyi lehet a területe?

5. Egy egyenes körkúp alapkörének a sugara 2 méter, magassága 5 méter. Határozzuk meg a kúpba írható maximális térfogatú henger adatait!

6.[hf] Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)$%-át kéne jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)$%-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kéne az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

7.[hf] Egy egyenlő szárú trapéz két szára és az alapja 1 cm hosszú. Hogyan kell megválasztani a száraknak az alappal bezárt szögét, hogy a területe maximális legyen?

8.[hf] Lenke elhatározta, hogy feltölti a 10000 literes úszómedencéjét, melyhez a vizet a közeli kútról fogja vödörrel hordani. Tetszőlegesen nagy vödröt választhat a munkához, de tudja, hogy ha egy fordulóval l liter vizet hoz, akkor a forduló $64+l^2$ másodpercig fog tartani. Hogyan válassza meg l értékét, hogy a lehető leggyorsabban végezzen?

9.[hf] Roland elhatározza, hogy kifesti a szobáját. Persze ehhez előbb a bútorokat többé-kevésbé össze kell tologatnia, hogy mindenütt hozzáférjen a falhoz. Roland tudja, hogy ha t órát fordít a bútorok összetologatására, akkor a festéssel $10(1+1/t)$ óra alatt végez, viszont a festés után megint t órát vesz igénybe a bútorok eredeti helyzetbe való állítása. Hogyan kell t értékét megválasztania, hogy a lehető leghamarabb legyen kész?

10.[hf] Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0,03 \cdot v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások B forintot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B-t pl. 480 Ft-nak.)

11.[hf] Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége $2,4$ m, illetve $1,6$ m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?

12.[hf] Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalapra illő félkör. Egy-egy ablak adott kerülete K. Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

11. feladatsor: Taylor-polinom, függvényvizsgálat

1. Számoljuk ki a következő Taylor-polinomokat, és írjuk fel a hozzájuk tartozó hibatagot!
   a) $f(x) = (x-2)^{-2}$, középpont: 3, $T_3(x) = ?$
   b) $f(x) = \sin x$, középpont: π, $T_n(x) = ?$
   c)[hf] $f(x) = e^x$, középpont: 0, $T_5(x) = ?$
   d)[hf] $f(x) = \ln \cos x$, középpont: 0, $T_6(x) = ?$

2. ln(1.1)-et szeretnénk közelítőleg kiszámolni a $\ln(1+x)$ függvény 0 közepű Taylor-polinomja segítségével. Hányadik tagig kell elmennünk, hogy a közelítés hibája 10^{-8} alá csökkenjen?

3.[hf] Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 5x - 3 + \sin 2x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú harmadrendű Taylor-polinomját és a hozzá tartozó hibatagot! Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0.1)$ értékét $T_3(0.1)$ értékével közelítjük?

4. Számoljuk ki közelítőleg a megadott számokat egy alkalmas függvény 2., 3., 4. rendű Taylor-polinomját használva eszközül. Becsüljük meg a közelítés hibáját!
   a) $\sqrt{2}$ b)[hf] $\sin 33^o$ c)[hf] e

5. Végezzük el a függvényvizsgálatot, rajzoljuk le a függvényt.
   a) $2x^6 - 15x^5 + 20x^4$ b) $\dfrac{7}{x} - x$ c) $\dfrac{x}{x^2-1}$ d) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$
   e)[hf] $\dfrac{x}{(1+x)^2}$ f)[hf] x^3e^{-x} g)[hf] e^{-x^2} h)[hf] $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

6.[hf] Már láttuk, hogy $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, sőt, $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$.
   a) deriváljuk az $\sqrt[x]{x}$ függvényt!
   b) hol veszi fel az $\sqrt[x]{x}$ függvény a maximumát?
   c) ábrázoljuk a $\sqrt[x]{x}$ függvényt!
   d) $\max\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = ?$

7.[hf] Keressük meg az $y^2 = x$ parabolának azt a pontját, amely a $(6,0)$ ponthoz a legközelebb van!

Emlékeztető

– Egy n-szer deriválható függvény *a körüli n. rendű Taylor-polinomja*:
$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. A közelítés *hibatagja:* $R_n(x,\xi) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
Taylor tétele: Ha $f^{(n)}$ differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor létezik egy $\xi \in [a,b]$, hogy $f(b) = T_n(b) + R_n(b,\xi)$.

– *Függvényvizsgálat* alatt azt értjük, hogy a függvény első két deriváltjának az előjelét megvizsgálva megállapítjuk, hogy a függvény hol monoton, hol konvex, hol vannak lokális szélsőértékei, inflexiós pontjai, majd ezek ismeretében lerajzoljuk a függvény grafikonját.

12. feladatsor: primitívfüggvény-keresés

1. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\int (3x^9 - 2x^2 + 1)\,dx$ b) $\int \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\,dx$ c) $\int \frac{x^2-7x+8}{x^2}\,dx$

d)[hf] $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$ e)[hf] $\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx$ f)[hf] $\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\,dx$

2. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\int (2x+3)^5\,dx$ b) $\int \frac{1}{(2x+3)^5}\,dx$ c) $\int \frac{2}{9x+1}\,dx$

d) $\int \frac{2}{(9x+1)^2}\,dx$ e) $\int \frac{2}{9x^2+1}\,dx$ f) $\int \frac{2}{9x^2+3}\,dx$

g) $\int \frac{2x}{9x^2+3}\,dx$ h) $\int \sqrt{5x-8}\,dx$ i) $\int \sqrt[3]{1-2x}\,dx$

j) $\int e^{11x}+\cos(111x)\,dx$ k)[hf] $\int \frac{x^3}{x^4+5}\,dx$ l)[hf] $\int \mathrm{tg}\,x\,dx$

m)[hf] $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$ n)[hf] $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ o)[hf] $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}\,dx$

3. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\int x^2(x^3-2)^5\,dx$ b) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}\,dx$ c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx$ e) $\int e^{9x}(e^{9x}+1)^9\,dx$ f) $\int xe^{3x^2}\,dx$

g) $\int \frac{e^{\sqrt{t}}\,dt}{\sqrt{t}}$ h) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$ i) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

j) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ k) $\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$ l) $\int x\cos x\,dx$

m) $\int xe^{2x}\,dx$ n) $\int x^2e^x\,dx$ o)[hf] $\int \ln x\,dx$

p)[hf] $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$ q)[hf] $\int e^x\sin x\,dx$ r)[hf] $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

4.[hf] Hol a hiba? $\ln|x| = \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{100}{100x}\,dx = 100\int \frac{1}{100x}\,dx = 100\frac{\ln|100x|}{100} = \ln|100x|$

Emlékeztető

– Legyen $f: I\to\mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ha egy $F: I\to\mathbb{R}$ függvényre $F' = f$, akkor F az f *primitív függvénye*. f primitív függvényeinek halmazát $\int f$ jelöli. Szokásos még az $\int f(x)\,dx$ jelölés is, illetve a *határozatlan integrál* elnevezés.

– $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}$ $(\int f = F)$; $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$;

$\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ (ha $\alpha\neq -1$); $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))$ $(\int f = F)$;

$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)}$

– A *parciális integrálás*: $\int fg' = fg - \int f'g$.

13. feladatsor: helyettesítéses integrálás, törtfüggvény

1. Alkalmas helyettesítéssel számoljuk ki a következő integrálokat (dolgozatban a helyettesítést mindig megadjuk):

a) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\ dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$ c) $\displaystyle\int \sin x e^{\cos x}\ dx$

d) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos x\ dx$ e)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{2^{\ln x}}{x}\ dx$ f)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$

g)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\, dx$ h)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ i)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{4\, dx}{1+(2x+1)^2}$

j)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$ k)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ l)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

2. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+6x+9}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x^2-4x+10}\, dx$ e)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}\, dx$ f)$^{\mathrm{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+x-2}\, dx$

Emlékeztető

– A *helyettesítéses integrálás*: $\displaystyle\int f(x)\ dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt|_{t=\varphi^{-1}(x)}$, amennyiben $\varphi'(t) < 0$ vagy $\varphi'(t) > 0$ a kérdéses intervallumon.
(Nem korrekt, ám könnyen megjegyezhető erre így gondolni: $\displaystyle\int f(x)\ dx = \int f(x)\left(\frac{dt}{dt}\right)\ dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}\ dt = \int f(x(t))x'(t)\ dt$. Ekkor valójában egy $x = x(t)$ helyettesítést végzünk. A kapott eredmény t függvénye, azaz vissza kell helyettesíteni t helyébe az $x(t)$ függvény inverzét.)

– $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\, dx$ kiszámolása: Legyen a nevező diszkriminánsa D.
Ha $D = 0$: A nevező teljes négyzet, így $\displaystyle= \int \frac{A}{(x+\frac{b}{2a})} + \frac{B}{(x+\frac{b}{2a})^2}\, dx = A\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right| - \frac{B}{x+\frac{b}{2a}}$.
Ha $D > 0$: Parciális törtekre kell bontani: $\displaystyle= \int \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}\, dx = A\ln|x+a| + B\ln|x+b|$.
Ha $D < 0$: $\displaystyle= A\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx + B\int \frac{1}{f(x)}\, dx = A\ln|f(x)| + B\,\mathrm{arctg}(\ldots)$.

14. feladatsor: Riemann-integrál

1. Egy 2 méter hosszú vályú keresztmetszetét az $f(x) = 15x^2,\ x \in [-0.1,\ 0.1]$ függvény írja le.
   a) Mennyi víz fér a vályúba?
   b) Ha 10 liter vizet öntünk bele, milyen magas lesz a vízszint?

2. Mekkora az f és g függvények grafikonja által közrefogott síkidom területe, ha
   a) $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$
   b)$^{\text{hf}}$ $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^3$
   c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = x^2$ és $g(x) = -x^2 + 2$

3. Számoljuk ki az integrálokat!

a) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{5.5} [x]\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$

f)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_{-3}^3 \{x\}\,dx$

g)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_0^{10\pi} (1-\cos 3x)\sin 3x\,dx$

h)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_{1/e}^e |\ln x|\,dx$

i)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

4.$^{\text{hf}}$ Mekkora területet vág ki az $x^2 + y^2 \leq 8$ körlapból az $y^2 = 2x$ parabola?

Emlékeztető

– A *Newton-Leibniz-szabály*: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható, és F egy primitív függvénye, akkor
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

– Helyettesítés határozott integrálra: Ha g szigorúan monoton növekvő vagy csökkenő, akkor
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))g'(y)\,dy. \qquad \text{(Ha a képletben minden integrál létezik.)}$$