Függvények hatványsorba fejtése, Taylor-sor, Maclaurin-sor, konvergenciatartomány

1) **Állítsuk elő az alábbi függvények $\mathbf{x_0 = 0}$ helyhez tartozó hatványsorát (esetleg különféle módszerekkel) éa állapítsuk meg a hatványsor konvergenciatartományát!)**

a) A $\cos 5x$ függvény hatványsora:
A hatványsor alakja általános alakja:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots .$$

A $\cos 5x$ függvény deriváltjai, és értékei az $x = 0$ helyen:

	$x = 0$
$f(x) = \cos 5x$	1
$f'(x) = -5\sin 5x$	0
$f''(x) = -5^2\cos 5x$	-5^2
$f'''(x) = 5^3\sin 5x$	0
$f^{\mathrm{IV}}(x) = 5^4\cos 5x$	5^4
$f^{\mathrm{V}}(x) = -5^5\sin 5x$	0
$f^{\mathrm{VI}}(x) = -5^6\cos 5x$	-5^6

Ezekkel a behelyettesítésekkel a Taylor-sor:

$$f(x) = 1 - \frac{5^2}{2!}x^2 + \frac{5^4}{4!}x^4 - \frac{5^6}{6!}x^6 - \ldots .$$

Konvergenciasugár:
A sorozat általános tagja:

$$a_n = a_{2k} = (-1)^k\,\frac{5^{2k}}{(2k)!}.$$

Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[2k]{\frac{5^{2k}}{(2k)!}} = \frac{5}{\sqrt[2k]{(2k)!}}.$$

Ennek a sorozatnak a határértéke nem látszik azonnal, ezért megpróbálkozuk a hányadoskritériummal is:

$$\frac{a_{2(k+1)}}{a_{2k}} = \frac{\frac{5^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}}{\frac{5^{2k}}{(2k)!}} = \frac{5^2}{2(k+1)(2(k+1)-1)} \to 0 \text{ , ha } k \to \infty.$$

Ezek szerint *a sorozat minden x-re konvergens.*

Másik módszer:

A $\cos u$ sorának ismeretében $u = 5x$ helyettesítés vissza kell, hogy adja a hatványsort:

$$\cos u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots .$$

A helyettesítést elvégezve:

$$\cos 5x = 1 - \frac{5^2}{2!}x^2 + \frac{5^4}{4!}x^4 - \frac{5^6}{6!}x^6 + \cdots .$$

Vagyis a sor minden x-re konvergens.

2) Az $f(x) = \sin x \cos x$ függvény hatványsora:

Első módszer:

Elő lehet állítani a Taylor-sort közvetlenül a deriváltak meghatározásával, és behelyettesítéssel.

Második módszer:

Tudván, hogy $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin x$:

$$\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} = u - \frac{u^3}{u!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \frac{u^9}{9!} - \cdots .$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{1}{2} \sin x = x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 - \frac{2^6}{7!}x^7 + \frac{2^8}{9!}x^9.$$

Harmadik módszer:

A $\cos 2t$ sorából tagonkénti integrálással is meghatározható a Taylor-sor, hiszen $f(x) = \int\limits_0^x \cos 2t \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2} \sin 2x$.

A $\cos 2t$ sora:

$$\cos 2t = 1 - \frac{2^2}{2!}t^2 + \frac{2^4}{4!}t^4 - \frac{2^6}{6!}t^6 + \cdots .$$

Tagonkénti integrálással:

$$\frac{1}{2} \sin 2x = x - \frac{2^2}{2!} \frac{x^3}{3} + \frac{2^4}{4!} \frac{x^5}{5} - \frac{2^6}{6!} \frac{x^7}{7} + \cdots .$$

Konvergenciasugár:

Hányadoskritériummal:

$$\left| \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} \right| = \frac{\frac{2^{2k}}{(2k+1)!}}{\frac{2^{2k-2}}{(2k-1)!}} \to 0 \text{ , ha } k \to \infty \text{ ,}$$

tehát a sor minden x-re konvergens.

3) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ sorbafejtése:

A lehetséges módszerek közül legegyszerűbbnek tűnik, ha $\cos u$ sorába $u = \sqrt{x}$ helyettesítéssel állítjuk elő a kívánt hatványsort.

$$\cos u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots$$
$$\cos\sqrt{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!}$$

Konvergenciasugár:

$$\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right| = \frac{\frac{1}{(2k+2)!}}{\frac{1}{(2k)!}} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \to 0 \text{ , ha } k \to \infty.$$

Minden x-re konvergens, de $x \geq 0$ kell legyen!

4) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ sorbafejtése az $x = 0$ helyen:

Táblázattal:

	$x = 0$		$x = 0$
$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f^{\mathrm{V}}(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f''(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f^{\mathrm{VI}}(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'''(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f^{\mathrm{VII}}(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Tehát a hatványsor:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x}{1!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x^2}{2!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x^3}{3!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x^4}{4!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x^5}{5!} - \cdots =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right].$$

Konvergenciasugár:

$$\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n)!}} = \frac{1}{2n+1} \to 0 \text{ , ha } n \to \infty,$$

tehát minden x-re konvergens a sor. $(-\infty < x < +\infty)$

5) $f(x) = \sin^2 x$ hatványora az $x = 0$ helyen:

Első lehetőség:

Táblázattal:

	$x = 0$
$f(x) = \sin^2 x$	0
$f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$	0
$f''(x) = 2\cos 2x$	2
$f'''(x) = -4\sin 2x$	0
$f^{\mathrm{IV}}(x) = -8\cos 2x$	-8
$f^{\mathrm{V}}(x) = 16\sin 2x$	0
$f^{\mathrm{VI}}(x) = 32\cos 2x$	32
$f^{\mathrm{VII}}(x) = -64\sin 2x$	0

$$f(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 + \frac{32}{6!}x^6 - + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

Konvergenciasugár:

$$\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = \frac{\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}} = \frac{4}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 \text{ , ha } n \to \infty,$$

tehát minden x-re konvergens a sor. $(-\infty < x < +\infty)$

Másik lehetőség:

A $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ sorfejtésével; $\cos u$ sora ismeretében, $u = 2x$ helyettesítéssel:

$$\frac{1}{2}\{1 - \cos 2x\} = \frac{1}{2}\left\{1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!}x^{2k+2}.$$

Harmadik lehetőség:

$f'(x) = \sin 2x$ ismeretében felírjuk $\sin u$ sorát, majd $u = 2t$ helyettesítéssel $\sin 2t$ sorát, majd tagonként integrálunk:

$$\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} \implies \sin 2t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}t^{2k+1}.$$

$\sin^2 x = \int\limits_0^x \sin 2t \, \mathrm{d}t$ alapján

$$\sin^2 x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{x^{2k+2}}{2k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2}.$$

6) $f(x) = e^{-x^2}$ hatványsora az $x = 0$ helyen:

Első lehetőség:

Táblázattal:

	$x = 0$
$f(x) = e^{-x^2}$	1
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$	0
$f''(x) = -2e^{-x^2} + (2x)^2 e^{-x^2}$	-2
$f'''(x) = 4xe^{-x^2} + 8xe^{-x^2} - (2x)^3 e^{-x^2}$	0
$f^{\mathrm{IV}}(x) = 12e^{-x^2} - 24x^2e^{-x^2} - 24x^2e^{-x^2} - (2x)^4 e^{-x^2}$	12

Innen a hatványsor:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4 + \ldots = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots.$$

Ez a módszer igen sok munkát igányel, nem elég hatékony.

Másik lehetőség:

e^x sora alapján.

e^x hatványsora: $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $(-\infty < x < +\infty)$.

e^{-x} hatványsora: $e^{-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$.

e^{-x^2} hatványsora: $e^{-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}$.

Konvergenciasugár nyilván $-\infty < x < +\infty$.

7) $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$ hatványsora az $x = 0$ helyen:

Minthogy $\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{x}{3}}$, ezért e^u sorában $u = \frac{x}{3}$ helyettesítéssel kapjuk a kívánt sorfejtést. A konvergenciatartomány itt is nyilvánvaló $(-\infty < x < +\infty)$:

$$e^{\frac{x}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^k k!}.$$

8) $f(x) = \operatorname{sh} 2x$ sorfejtése az $x = 0$ helyen:

Az $\operatorname{sh} u$ sorfejtése alapján dolgozunk:

	$u=0$
$f(u) = \operatorname{sh} u$	0
$f'(u) = \operatorname{ch} u$	1
$f''(u) = \operatorname{sh} u$	0
$f'''(u) = \operatorname{ch} u$	1
$f^{\mathrm{IV}}(u) = \operatorname{sh} u$	0

Innen:

$$\operatorname{sh} u = \frac{1}{1!}u + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{5!}u^5 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Nyilvánvaló, hogy a konvergencia-tartomány $-\infty < u < +\infty$. Innen:

$$\operatorname{sh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

ugyancsak $-\infty < u < +\infty$ konvergencia-tartománnyal.

9) $f(x) = \operatorname{ch}^2 x$ sorfejtése az $x = 0$ helyen:

A $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$ alapján és a $\operatorname{ch} 2x$ sorfejtését felhasználva:

	$u=0$
$f(u) = \operatorname{ch} u$	1
$f'(u) = \operatorname{sh} u$	0
$f''(u) = \operatorname{ch} u$	1
$f'''(u) = \operatorname{sh} u$	0
$f^{\mathrm{IV}}(u) = \operatorname{ch} u$	1

$$\operatorname{ch} u = 1 + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}u^4 + \frac{1}{6!}u^6 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k}}{(2k)!}.$$

Nyilvánvaló, hogy a konvergencia-tartomány $-\infty < u < +\infty$.

$$\operatorname{ch} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} = 1 + \sum_{k+1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}$$

Konvergencia-tartománya $-\infty < x < +\infty$.

10) $f(x) = (1+x)^3$ hatványsora az $x = 0$ helyen.

	$x = 0$
$f(x) = (1+x)^3$	1
$f'(x) = 3(1+x)^2$	3
$f''(x) = 6(1+x)$	6
$f'''(x) = 6$	6
$f^{\mathrm{IV}}(x) = 0$	0

Innen a

$$(1+x)^3 = 1 + \frac{3}{1!}x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

polinom adódik, ami a köbreemelés eredménye.

11) $f(x) = (1+x)^{-3}$ hatványsora az $x = 0$ helyen:
Binomiális sorfejtéssel:

$$(1+x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} x^k = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + - \ldots + \binom{-3}{k} x^k + \ldots$$

$$\binom{-3}{k} = \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)\ldots(-3-k+1)}{k!}.$$

Konvergenciassugár meghatározása:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)\ldots(-3-n+1)(-3-n)}{(n+1)!}}{\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)\ldots(-3-n+1)}{n!}}\right| =$$

$$= \left|\underbrace{\frac{-2}{n+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{n+1}{n+1}}_{\to 1}\right| \to 1,$$

tehár $R = 1$. A konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

12) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ hatványsora $x = 0$ helyen:
Binomiális sorfejtéssel:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{k} x^k = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{80}x^3 - + \ldots .$$

Két példa a binomiális együtthatókra:

$$\binom{\frac{1}{3}}{0} = 1 \cdot \binom{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} \cdot \binom{\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!} = -\frac{\frac{2}{9}}{2!} = -\frac{1}{9}$$

$$\binom{\frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!} = \frac{\left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!} = \frac{\frac{10}{27}}{6} = \frac{5}{81}$$

A konvergenciatartomány meghatározása:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\binom{\frac{1}{3}}{n+1}}{\binom{\frac{1}{3}}{n}}\right| = \left|\frac{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!(n+1)}}{\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{3}-n}{n+1}\right| = \left|\frac{\frac{4}{3}}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| \to 1.$$

Innen $R = 1$, a konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

13) $f(x) = \ln(1+x)$ sorbafejtése az $x = 0$ helyen:

Táblázattal:

	$x = 0$
$f(x) = \ln(1+x)$	0
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$	1
$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$	-1
$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$	2
$f^{\mathrm{IV}}(x) = \dfrac{6}{(1+x)^6}$	-6

Innen az $\ln(1+x)$ Taylor-sora:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!},$$

ugyanis

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + - \ldots =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!} + \ldots.$$

14) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sorfejtése az $x = 0$ helyen:

Minthogy $\frac{1}{1+x} = \{\ln(1+x)\}'$, ezért az előbbi sort tagonként differenciálva kapjuk a kívánt sorfejtést:

$$\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^{k-1} \left(\frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

Konvergenciasugár: $R = 1$, tartomány: $-1 < x < 1$.

15) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ sorfejtése az $x = 0$ helyen.

A sorfejtéshez szükséges deriváltak:

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\left(1-x^2\right)^2 + 2x \cdot 2\left(1-x^2\right) \cdot 2x}{(1-x^2)^4} = \frac{2-2x^2+8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{12x\left(1-x^2\right)^3 + \left(2+6x^2\right) 3\left(1-x^2\right)^2 \cdot 2x}{(1-x^2)^6} = \frac{12x-12x^3+12x+36x^3}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{24x+24x^3}{(1-x^2)^4}$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{\left(24+72x^2\right)\left(1-x^2\right)^4 + 4\left(1-x^2\right)^3 2x\left(24x+24x^3\right)}{(1-x^2)^8} =$$

$$= \frac{24-24x^2+72x^2-72x^4+192x^2+192x^4}{(1+x)^5} =$$

$$= \frac{120x^4+240x^2+24}{(1-x^2)^5}$$

Ezek értékei az $x = 0$ helyen rendre: $f(x=0) = 1$; $f'(x=0) = 0$; $f''(x=0) = 2$; $f'''(x=0) = 0$; $f^{\mathrm{IV}}(x=0) = 24$. Innen a kérdéses Taylor-sor:

$$\frac{1}{(1+x^2)} = 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{24}{4!}x^4 + \ldots = 1 + x + x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

A konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

16) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)}$ sorfejtése az $x = 0$ helyen

Mivel

$$\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]' = \frac{2x}{1+x^2},$$

ezért $\ln\left(1+x^2\right)$ sorának tagonkénti differenciálásával nyerjük a kívánt sorfejtést. Vagyis a 13. feladat alapján:

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{k} \qquad (-1 < x < 1).$$

Tehát:

$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}.$$

A konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

17) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ sorfejtése az $x = 0$ helyen.

Első lehetőség:

$(1-x)^{-2}$ binomiális sorfejtésével:

$$(1-x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} x^k (-1)^k = 1 + 2 + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Második lehetőség:

A 14. feladat alapján. $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ sorfejtésből, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ alapján, tagonkénti differenciálással:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

18) $f(x) = \ln(1-x)$ sorfejtáse az $x = 0$ helyen.

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-x}\, \mathrm{d}x$$

alapján és $\dfrac{1}{1-x}$ sorából (17. feladat). A következő kifejezést tagonként integráljuk:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Ebből kapjuk:

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

19) $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$ sorfejtése az $x = 0$ helyen.

Első lehetőség: $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{2k}$ $(-1 < x < 1)$ sorból.

$$\ln\left(1-x^2\right) = \int_0^x \frac{-2x}{1-x^2}\, \mathrm{d}x$$

felhasználásával ($(-2x)$-szal szorozva és tagonként integrálva)

$$\frac{-2x}{1-x^2} = -\sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k+1}.$$

Innen:

$$\ln\left(1-x^2\right) = -\sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{x^{2k+2}}{2k+2} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2(k+1)}}{k+1}.$$

A konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

Második lehetőség: $\ln\left(1-x^2\right) = \ln(1-x)(1+x) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$ alapján, a $\ln(1-x)$ és $\ln(1+x)$ sorának összegeként. (13. és 18. feladat.)

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

Ezen sorok összege:

$$\ln\left(1-x^2\right) = -x^2 - 2\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^6}{6} - \dots = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2(k+1)}}{k+1}.$$

20) $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ sorfejtése az $x=0$ helyen

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$, $(-1 < x < 1)$ sor alapján (13. feladat):

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{k},$$

ugyancsak $-1 < x < 1$ konvergencia-tartománnyal.

21) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ sorfejtése az $x=0$ helyen:

$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)$ alapján:

$$\frac{1}{2}\ln(1+x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln(1-x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \frac{1}{2}\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\right)$$

Innen:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\left(2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \ldots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

22) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ sorfejtése az $x = 0$ helyen:
Az arkusz tangens deriváltját fejtjük sorba, majd tagonként integrálunk:

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad (-1 < x < 1)$$

Innen:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

A konvergencia-tartomány: $-1 < x < 1$.

Írjuk fel az alábbi függvények Taylor-sorfejtését az x_0 helyen.

23) $f(x) = e^x$ sorfejtése az $x_0 = 1$ helyen:
Táblázattal:

	$x_0 = 1$
$f(x) = e^x$	e
$f'(x) = e^x$	e
$f''(x) = e^x$	e
$f'''(x) = e^x$	e
$f^{\mathrm{IV}}(x) = e^x$	e

Innen a kérdéses sor:

$$e^x = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{e}{k!}(x-1)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^k}{k!}$$

A konvergencia-tartomány: $-\infty < x < +\infty$

24) $f(x) = \ln x$ sorfejtése az $x_0 = 1$ helyen:
Táblázattal:

	$x_0 = 1$
$f(x) = \ln x$	0
$f'(x) = \frac{1}{x}$	1
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$	-1
$f'''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$	2
$f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{-6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$	-6

Innen az $\ln x$ sora:

$$\begin{aligned}\ln x &= 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + (-1)^3 \frac{(x-1)^2}{2!} + (-1)^4 \frac{2(x-1)^3}{3!} + \\ &+ (-1)^5 \frac{6(x-1)^4}{4!} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!\,(x-1)^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k}\end{aligned}$$

Konvergenciasugár: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$

Tehát $R = 1$, a konvergencia-tartomány ezek szerint $0 < x \le 2$, ugyanis $x = 0$-nál az $\ln x$ deriváltjai nincsenek értelmezve.

25) $f(x) = 2x^3 - x$ sorfejtése az $x_0 = \dfrac{1}{2}$ helyen:

Táblázattal:

	$x_0 = \frac{1}{2}$
$f(x) = 2x^3 - x$	$-\frac{1}{4}$
$f'(x) = 6x^2 - 1$	$\frac{1}{2}$
$f''(x) = 12x$	6
$f'''(x) = 12$	12
$f^{\mathrm{IV}}(x) = 0$	0

Innen a következő polinom adódik:

$$f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

26) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ sorfejtése az $x_0 = -2$ helyen:

Első lehetőség:

A Taylor-formula alkalmazásával, deriválással, táblázattal. A deriválást az $\dfrac{x+1}{x+3} = 1 - \dfrac{2}{x+3}$ átalakítással végezzük.

Második lehetőség:

A következő mértani sor felhasználásával:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x+3} &= 1 - \frac{2}{x+3} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+(x+2)} = \\ &= 1 - 2\left[1 - (x+2) + (x+2)^2 - (x+2)^3 + - \ldots\right] = \\ &= -1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (x+2)^k\end{aligned}$$

A konvergencia-sugár: $R = 1$

A konvergencia-tartomány: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{(x+2)^{n+1}}{(x+2)^n}\right| = |x+2| < 1$

Innen $-1 < x+2 < 1$, azaz $-3 < x < -1$.

27) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ sorfejtése az $x_0 = -1$ helyen:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+3-2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3} = 1 - \frac{2}{2+(x+1)} = 1 - \frac{1}{1+\frac{x+1}{2}}$$

A második tag egy $q = -\dfrac{x+1}{2}$ hányadosú mértani sor összege. Emiatt:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x+3} &= 1 - \left[1 - \frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(x+1)^3}{8} + - \ldots + (-1)\,\frac{(x+1)^k}{2^k} + \ldots\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\frac{(x+1)^k}{2^k}\end{aligned}$$

A konvergencia-sugár: $R = 2$

A konvergencia-tartomány: $[-1-R; -1+R]$, azaz $-3 < x < 1$.

28) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sorfejtése az $x_0 = 2$ helyen:

A $*$-gal jelölt helyen a $q = -\dfrac{x+1}{2}$ hányadosú mértani sor összegképletét használtuk fel.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}} = \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{3}\left[1-\frac{x-2}{3}+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2-\left(\frac{x-2}{3}\right)^3+-\dots\right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

Konvergencia-tartomány: $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 1 \Longrightarrow |x-2| < 3 \Longrightarrow -1 < x < 5$

29) Felírandó az $y = \operatorname{tg} x$ függvény 6-odfokú Taylor polinomja az $x = 0$ helyen:
Az $f(x)$ függvény Taylor-polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

a következő képlet szerint közelíti meg az $f(x)$ függvényt:

$$|H| = |f(x)-T_n(x)| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{(x,x_0)}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Az egyes deriváltak:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x = 1+y^2 \\
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+x^2\right) = 2yy' \\
\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}y^3} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2yy') = 2\left(y'^2+yy''\right) \\
y^{(4)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\left(y'^2+yy''\right) = 2\left(2y'y''+y'y''+yy'''\right) \\
y^{(5)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\left(2y'y''+y'y''+yy'''\right) = 2\left(3y''^2+3y'y'''+y'y'''+yy^{(4)}\right) \\
y^{(6)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(6y''^2+8y'y'''+2yy^{(4)}\right) = 12y''y'''+8y''y'''+8y'y^{(4)}+2y'y^{(4)}+2yy^{(5)}
\end{aligned}$$

Az egyes deriváltak értékei az $x = 0$ helyen:

$$\begin{aligned} y\,(0) &= 0 \\ y'\,(0) &= 1 \\ y''\,(0) &= 0 \\ y'''\,(0) &= 2 \\ y^{(\mathrm{IV})}\,(0) &= 0 \\ y^{(\mathrm{V})}\,(0) &= 16 \\ y^{(\mathrm{VI})}\,(0) &= 0 \end{aligned}$$

Innen a Taylor-polinom:

$$T_5\,(x) = T_6\,(x) = 1 \cdot \frac{x}{1!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + 16 \cdot \frac{x^5}{5!} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$$

30) Írjuk fel az $y = \cos^2 x$ függvény Maclaurin sorát!

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Ezzel a kérdéses sor némi átalakítás után:

$$\begin{aligned} y = \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right) \end{aligned}$$

Ez a sor is konvergens a $-\infty < x < \infty$ számközben, mert a maradéktag 0-hoz tart, ha $n \to \infty$. Ugyanis tetszőleges x esetén $\frac{(2x)^n}{n!} \to 0$, ha $n \to \infty$. (Váltakozó előjelű sor esetében a hiba kisebb, mint a legelső figyelembe nem vett tag.)

Hasonló módon adódik, hogy

$$\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

sor is a $-\infty < x < \infty$ számközben konvergens.

31) Felírandó az $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ függvény Taylor-sora ($x = 0$ helyen).

A binomiális sorfejtés értelmében:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}\left(-x^2\right) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}\left(-x^2\right)^2 + \ldots +$$
$$+ \binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-x^2\right)^n + \ldots = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1}\left(-x^2\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}\left(-x^2\right)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-x^2\right)^n + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n} + \ldots$$

A sor a $-1 < x < 1$ intervallumon mindenütt konvergens.

32) Számítsuk ki az $y = \operatorname{ch} 4x$ hatodfokú közelítő Taylor-polinomját a 0 hely közelében!
A szükséges deriváltak és azok értékei az $x = 0$ helyen:

	$x = 0$
$f(x) = \operatorname{ch} 4x$	1
$f'(x) = 4 \operatorname{sh} 4x$	0
$f''(x) = 4^2 \operatorname{ch} 4x$	4^2
$f'''(x) = 4^3 \operatorname{sh} 4x$	0
$f^{(\mathrm{IV})}(x) = 4^4 \operatorname{ch} 4x$	4^4
$f^{(\mathrm{V})}(x) = 4^5 \operatorname{sh} 4x$	0
$f^{(\mathrm{VI})}(x) = 4^6 \operatorname{ch} 4x$	4^6

Innen a Taylor-polinom:

$$T_6(x) = 1 + \frac{4^2}{2!}x^2 + \frac{4^4}{4!}x^4 + \frac{4^6}{6!}x^6$$

Ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha az $y = \operatorname{ch} u$ sorában u helyett $4x$-et írunk:

$$T_6(u) = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!},$$

ahonnan egyszerű behelyettesítés után kapjuk a kívánt sort.

33) Meghatározandó az $y = e^{-x^2}$ függvény $2n$-edfokú Taylor-féle polinomja a 0 hely közelében.
Az $y = e^u$ Taylor-polinomja $u = 0$-ra ismert:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots.$$

Itt u helyébe $\left(-x^2\right)$-et helyettesítve:

$$T_{2n}(x) = 1 + \frac{\left(-x^2\right)}{1!} + \frac{\left(-x^2\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!},$$

tehát a kérdéses sor:

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(x^2\right)^k}{k!}.$$

34) Határozzuk meg az $y = \ln x$ n-edfokú polinomját az 1 pont környezetében!

	$x_0 = 1$
$f(x) = \ln x$	0
$f'(x) = \frac{1}{x}$	1
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$	-1
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(\mathrm{n})}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{x^n}$	$(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1)$

Ezek alapján a Taylor-polinom:

$$T_n(x) = \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

Néhány fontosabb függvény végtelen Taylor-sora és azok konvergencia-intervallumai:

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \ (-\infty < x < +\infty)$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ (-\infty < x < +\infty)$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \ (-\infty < x < +\infty)$
- $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ (-\infty < x < +\infty)$

- $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$, $(-\infty < x < +\infty)$

- $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k}$, $(-1 < x < 1)$

- $\operatorname{ar\,th} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $(-1 < x < 1)$

35) Meghatározandó $T_4(x)$, ha $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Mivel $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, ezért a kitevő $n = -\dfrac{1}{2}$. A binomiális együtthatók kiszámítása:

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= \binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \frac{n}{1!} = n = \binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \\
\binom{n}{2} &= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2} = \frac{3}{8} \\
\binom{n}{3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \\
&= -\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16} \\
\binom{n}{4} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{5}{16} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}-3\right)}{4} = \\
&= \frac{5}{16} \cdot \frac{\frac{7}{2}}{4} = \frac{5}{16} \cdot \frac{7}{8} = \frac{35}{128}
\end{aligned}
$$

Tehát a Taylor-sor:

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4.$$

36) Meghatározandó az e értéke két tizedes pontossággal.

Az $f(x) = e^x$ sora az $x_0 = 0$ helyen, és $x = 1$-et helyettesítve:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

A két tizedesjegyű pontosság matematikai feltétele:

$$\left| e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \right| = H < 0{,}005.$$

A hibaképlet szerint:

$$H < \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{(x_0,x)} f^{(n+1)}(x),$$

tehát minthogy $x_0 = 0$ és $x = 1$, $f^{n+1}(x) < 3$ a $(0,1)$-ban, ezért

$$H < \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 3 = \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}005 = 5 \cdot 10^{-3},$$

tehát

$$\frac{3000}{5} = 600 < (n+1)!,$$

ahonnan $n = 5$, hiszen $(n+1)! = 6! = 720$. $T_5(x)$-szel számolva:

$$T_5(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} =$$
$$= 2 + 0{,}5 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 = 2{,}7167$$

37) Mekkora szakaszon helyettesíthető az $y = \operatorname{ch} x$ görbe másodfokú parabolával, ha előírjuk, hogy a hiba kisebb legyen, mint $5 \cdot 10^{-3}$?
A hibatag:

$$\left| \operatorname{ch} x - \left(1 + \frac{x^2}{2!}\right) \right| \leq \frac{x^4}{4!} \max_{(0,x)} \operatorname{ch} x < \frac{x^4}{4!} e^x < \frac{x^4 3^x}{4!} < 0{,}005.$$

A helyettesítés azon az $-x_0 < x < x_0$ szakaszon tehető meg, ahol x_0 kielégíti az

$$x^4 3^x = 4! \cdot 0{,}005, \text{ azaz a } x^4 3^x = 0{,}120$$

egyenletet. Ezt csak közelítő módszerrel lehet megoldani, mely alapján x_0 0,5 és 0,6 közé esik.

Fourier-sorok

Lényegében elegendő, ha csak a 2π szerint periodikus függvények Fourier-sorával foglalkozunk. A Fourier-sorfejtés az adott 2π szerint periodikus függvény az alábbi függvénysort jelenti:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol az egyes együtthatók:

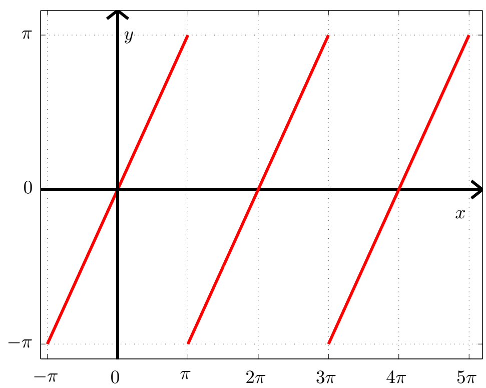
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,\mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx\,\mathrm{d}x.$$

Könnyen belátható, hogy páros függvények esetében $b_k = 0$, valamint páratlan függvények esetében $a_k = 0$.

1) Legyen $f(x) = x$, ha $-\pi < x < \pi$ és $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ábrázoljuk $f(x)$-et és írjuk fel a Fourier-sorát!



Az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin kx}{k}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}^2\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

A b együtthatók:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{\frac{1}{\pi}\left\{-\pi\frac{\cos k\pi}{k}-\pi\frac{\cos k(-\pi)}{k}\right\}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,\mathrm{d}x =$$

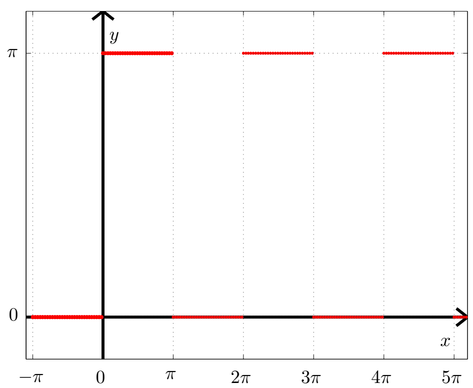
$$= \frac{-2}{k}\cos k\pi + \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} = -\frac{2}{k}\cos k\pi.$$

A Fourier-sor tehát:

$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{x} + \frac{\sin 3x}{3} - + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right] =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

2) Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } -\pi < x \leq 0 \\ \pi & \text{, ha } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt, és határozzuk meg a Fourier-sorát!



Az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\pi x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2 - 0}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\pi\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} =$$

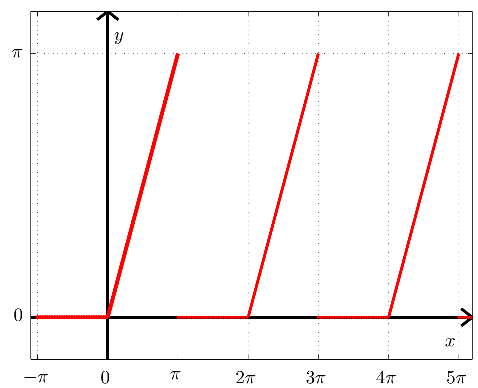
$$= \frac{1}{k}\left[-\cos k\pi + 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{, ha } k \text{ páros} \\ \frac{2}{k} & \text{, ha } k \text{ páratlan} \end{cases} .$$

A Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

3) Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } -\pi < x \le 0 \\ x & \text{, ha } 0 < x \le \pi \end{cases}$ és $f(x) = f(x + 2k\pi)$,
$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt, és határozzuk meg a Fourier-sorát!



Az a együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{, ha } k \text{ páros} \\ -\frac{2}{\pi k^2} & \text{, ha } k \text{ páratlan} \end{cases}.$$

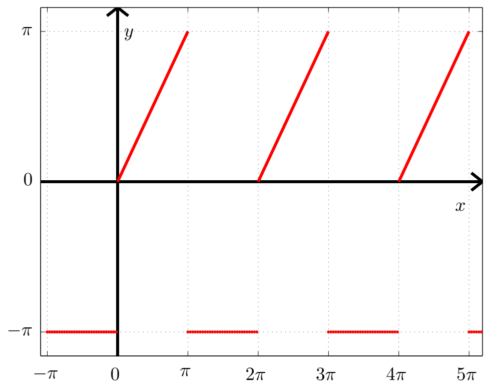
A b együtthatók:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{k} & \text{, ha } k \text{ páros} \\ \frac{1}{k} & \text{, ha } k \text{ páratlan} \end{cases}.$$

A Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + - \ldots.$$

4) Legyen $f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{, ha } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{, ha } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt, és határozzuk meg a Fourier-sorát!



A részletes számítások nélkül közöljük az eredményeket.
Az a együtthatók:

$$a_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } n \text{ páros} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{, ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

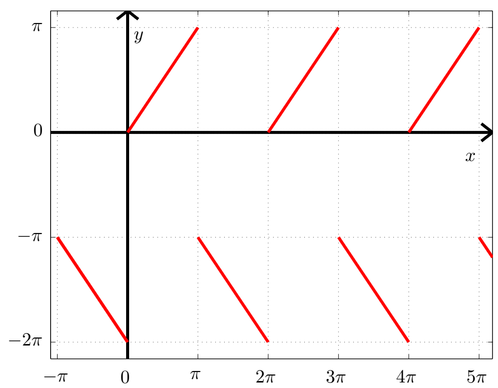
A b együtthatók:

$$b_n = \frac{1}{n}(1 - 2\cos n\pi) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{, ha } n \text{ páros} \\ \frac{3}{n} & \text{, ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A Fourier-sor:

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + 3\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{3}{3}\sin 3x - \ldots .$$

5) Legyen $f(x) = \begin{cases} -x & \text{, ha } 0 \le x < \pi \\ -x & \text{, ha } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$ és $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt, és határozzuk meg a Fourier-sorát!



Az együtthatók:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{, ha } n \text{ páratlan} \\ 0 & \text{, ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{, ha } n \text{ páratlan} \\ 0 & \text{, ha } n \text{ páros} \end{cases} .$$

A Fourier-sor:

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\cos x + 2\sin x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \frac{4}{3}\sin 3x - + \ldots .$$

6) Legyen $f(x) = x^2$, ha $x \in]-\pi, \pi]$ és $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Írjuk fel a Fourier-sorát!

A függvény páros, tehát $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$
$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{n} & , \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0 & , \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} .$$

A Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

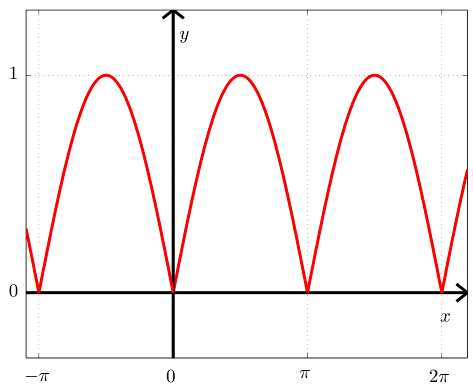
7) Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } -\pi < x \leq 0 \\ x^2 & , \text{ha } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Írjuk fel a Fourier-sorát!

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$
$$a_n = (-1)^n \frac{2}{n^2}$$
$$b_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{n} & , \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{\pi}{n} - \frac{4}{n^3\pi} & , \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} .$$

A Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 2\cos x + \left(\pi - \frac{4}{\pi}\right)\sin x + \frac{2}{4}\cos 2x - \frac{\pi}{2}\sin 2x - + \ldots .$$

8) Legyen $f(x) = |\sin x|$. Írjuk fel a Fourier-sorát!



A $|\sin x|$ páros függvény, tehát $b_k = 0$. Az a együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x \cos kx \,\mathrm{d}x \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{2}{\pi}\frac{-(\cos k\pi + 1)\frac{1}{k^2}}{\frac{k^2-1}{k^2}} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } k \text{ páratlan} \\ -\frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{, ha } k \text{ páros} \end{cases}.$$

A $*$-gal jelölt egyenlőség részletesen:

$$\int \sin x \underbrace{\cos kx}_{\left[\frac{\sin kx}{k}\right]'} \mathrm{d}x = \sin x \frac{\sin kx}{k} - \int \cos x \underbrace{\frac{\sin kx}{k}}_{\left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]'} \mathrm{d}x =$$

$$= \sin x \frac{\sin kx}{k} - \cos x \frac{\cos kx}{k^2} + \frac{1}{k^2}\int \sin x \cos kx \,\mathrm{d}x.$$

Az első és utolsó kifejezés egy egyenletet alkot, amiből átrendezéssel meghatározható a $*$-gal jelölt egyenlőségben a határozott integrál:

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\int\limits_{0}^{\pi} \sin x \cos kx \,\mathrm{d}x = \left[\sin x \frac{\sin kx}{k} + \cos x \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{-(\cos k\pi + 1)}{k^2}.$$

Vagyis a Fourier-sor:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}.$$

9) Legyen $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{, ha } 0 \le x < \pi \\ 0 & \text{, ha } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$ és $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Írjuk fel a Fourier-sorát! Az a_0 együttható:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Az a_k együtthatók meghatározásához felhasználjuk az előző feladat $*$-os átalakítását:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x \cos kx \,\mathrm{d}x \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{1}{\pi}\frac{-(\cos k\pi + 1)}{k^2 - 1} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } k \text{ páratlan} \\ -\frac{2}{\pi(k^2-1)} & \text{, ha } k \text{ páros} \end{cases}.$$

A b_k együtthatókat hasonlóan fogjuk meghatározni, azzal a különbséggel, hogy a határozott integrálra felírt egyenletnél az átrendezésnél $k \neq 1$ kikötéssel kell, hogy éljünk:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin x \sin kx \, \mathrm{d}x.$$

A $\sin x \sin kx$ primitív függvénye:

$$\int \sin x \underbrace{\sin kx}_{\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]'} \mathrm{d}x = \sin x \left(-\frac{\cos kx}{k}\right) + \int \cos x \underbrace{\frac{\cos kx}{k}}_{\left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]'} \mathrm{d}x =$$

$$= \sin x \left(-\frac{\cos kx}{k}\right) + \cos x \frac{\sin kx}{k^2} + \frac{1}{k^2} \int \sin x \sin kx \, \mathrm{d}x.$$

Innen átrendezéssel ($k \neq 1$):

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \int \sin x \sin kx \, \mathrm{d}x = -\sin x \frac{\cos kx}{k} + \cos x \frac{\sin kx}{k^2}.$$

Ebből a határozott integrállal a b_k együtthatók ($k \neq 1$):

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin x \sin kx \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\frac{1}{k^2}\left(\cos x \sin kx - k \sin x \cos kx\right)}{\frac{k^2-1}{k^2}}\right]_0^{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} = 0.$$

Ha $k = 1$, akkor a b_k egyszerűbb, és ráadásul nem 0, vagyis ez egy lényeges kikötés volt:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1 - 4k^2}.$$

10) Legyen $f(x) = \sin^2 x$. Határozzuk meg a Fourier-sorát!

A függvény páros, tehát $b_k = 0$. Az a_0 az előző feladat alapján:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Az a_k együtthatók:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cos kx \, \mathrm{d}x$$

$$\int_0^\pi \sin^2 x\cos kx\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x -$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^\pi \cos 2x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi}_{0} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\cos kx\,\mathrm{d}x.$$

Az eredményben szereplő határozott integrált hasonlóan határozzuk meg, mint az előző két feladatban:

$$\int_0^\pi \cos 2x \underbrace{\cos kx}_{\left[\frac{\sin kx}{k}\right]'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\cos 2x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi}_{0} + 2\int_0^\pi \sin 2x\frac{\sin kx}{k}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{k}\int_0^\pi \sin 2x \underbrace{\sin kx}_{\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]'}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k}\underbrace{\left[\sin 2x\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^\pi}_{0} + \frac{4}{k^2}\int_0^\pi \cos 2x\cos kx\,\mathrm{d}x.$$

Az első és utolsó kifejezést egyenlővé téve és átrendezve – a $k \neq 2$ kikötéssel élve – az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\left(1-\frac{4}{k^2}\right)\int_0^\pi \cos 2x\cos kx\,\mathrm{d}x = 0.$$

Innen az következik, hogy $k \neq 2$ esetén $\int_0^\pi \cos 2x\cos kx\,\mathrm{d}x = 0$, vagyis $a_k = 0$. Ha azonban $k = 2$, akkor az együttható:

$$a_2 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1+\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^\pi =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Összefoglalva: $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 0, \ldots, a_k = 0$. A Fourier-sor:

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

vagyis a sor egy véges trigonometrikus polinom.

11) Legyen $f(x) = \sin^2 x\cos 2x$. Határozzuk meg a Fourier-sorát!
Az $f(x)$ függvény páros, ezért $b_k = 0$. Az a_0 együttható:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \sin^2 x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4},$$

ugyanis

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos 2x \, \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} \cos 2x \, \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi \frac{\cos^2 2x}{2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi - \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos 4x) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{\sin 4x}{16}\right]_0^\pi =$$

$$= 0 - \frac{\pi}{4} - 0 - 0 + 0 + 0 = -\frac{\pi}{4}.$$

Az a_k együtthatók:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cos 2x \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{\sin^2 x \cos 2x \cos kx}_{I} \, \mathrm{d}x$$

. Először egy átalakítást végzünk el az intergrandusban:

$$\sin^2 x \cos 2x = \frac{1-\cos 2x}{2} \cos 2x = \frac{\cos 2x - \cos^2 2x}{2} = \frac{\cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2}}{2} =$$

$$= \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\cos 4x}{4}.$$

Ezzel az eredeti kifejezés:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi I \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \cos 2x \cos kx \, \mathrm{d}x}_{\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & \text{, ha } k = 2 \\ 0 & \text{, ha } k \neq 2 \end{array}} - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \cos kx \, \mathrm{d}x}_{\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0} - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \cos 4x \cos kx \, \mathrm{d}x}_{\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & \text{, ha } k = 4 \\ 0 & \text{, ha } k \neq 4 \end{array}} .$$

Tehát $a_0 = -\frac{1}{4}$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{4}$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0, \ldots, a_k = 0$. Vagyis a Fourier-sor a

$$\sin^2 x \cos 2x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x$$

véges trigonometrikus polinom.

12) Legyen $f(x) = \sin 4x$. Határozzuk meg a Fourier-sorát!

A függvény páros, tehát $b_k = 0$. Az a_0 együttható:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\sin^2 x\right]^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 x\right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi} \left[x - \sin 2x\right]_0^\pi + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{1+\cos 4x}{2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[x - \sin 2x\right]_0^\pi + \left[\frac{x}{8\pi}\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin 4x}{32\pi}\right]_0^\pi = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}.$$

A többi a_k kiszámításához az alábbi átalakítást használjuk fel:

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Ezzel az a_k együtthatók:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{3}{8\pi}\,[x]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos kx \,\mathrm{d}x}_{\begin{array}{ll} 0 & \text{, ha } k \neq 2 \\ -\frac{1}{2} & \text{, ha } k = 2 \end{array}} + \underbrace{\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos 4x \cos kx \,\mathrm{d}x}_{\begin{array}{ll} 0 & \text{, ha } k \neq 4 \\ \frac{1}{8} & \text{, ha } k = 4 \end{array}},$$

ahonnan $a_0 = \frac{3}{8}$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{8}$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0, \ldots$, $a_k = 0$. A Fourier-sor a

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

véges trigonometrikus polinom.

13) Legyen $f(x) = e^x$, ha $0 < x \leq 2\pi$ és $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $(k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$. Állítsuk elő a Fourier-sorát!

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\,[e^x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^x \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2 + 1},$$

ugyanis

$$\int e^x \cos kx \,\mathrm{d}x = e^x \frac{\sin kx}{k} - \frac{1}{k}\int e^x \sin kx \,\mathrm{d}x =$$
$$= e^x \frac{\sin kx}{k} + e^x \frac{\cos kx}{k^2} - \frac{1}{k^2}\int e^x \cos kx \,\mathrm{d}x.$$

Innen az eredeti integrál meghatározható átrendezéssel, azaz a következő egyenlet megoldását kell visszaírnunk az a_k-ra felírt kifejezésbe:

$$\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\int e^x \cos kx \,\mathrm{d}x = e^x \left\{\frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right\},$$

ahonnan következik, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^x \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{1 + \frac{1}{k^2}}\left\{\frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right\}\right]_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{2\pi}}{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2}} \cdot \frac{1}{k^2}\right) = \frac{e^{2\pi} - 1}{(k^2 + 1)\,\pi} = a_k.$$

A b_k együtthatók:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^x \sin kx \,\mathrm{d}x$$

. Az integrál primitív függvényét ismét egy egyenlet felírásával kapjuk meg:

$$\int e^x \sin kx \,\mathrm{d}x = -e^x\frac{\cos kx}{k} + \frac{1}{k}\int e^x \cos kx \,\mathrm{d}x =$$
$$= -e^x\frac{\cos kx}{k} + e^x\frac{\sin kx}{k^2} - \frac{1}{k^2}\int e^x \sin kx \,\mathrm{d}x,$$

ahonnan az egyenlet:

$$\frac{k^2+1}{k^2}\int e^x \sin kx \,\mathrm{d}x = -e^x\frac{\cos kx}{k} + e^x\frac{\sin kx}{k^2},$$

vagyis az együttható:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\frac{e^x(\sin kx - k\cos kx)}{k^2}}{\frac{k^2+1}{k^2}}\right]_0^{2\pi} = -\frac{k}{k^2+1}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\right).$$

A Fourier-sor pedig:

$$e^x = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{1+k^2} - \frac{k\sin kx}{1+k^2}\right].$$

Nem 2π, hanem $2l$ szerint periodikus függvények Fourier-sorba fejtése:

14) Legyen $f(x) = x$, ha $0 < x \le 1$, és $f(x+k) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$. Állítsuk elő a Fourier-sorát!

A periódus: $2l = 1$. Ezek szerint az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int\limits_0^{2l} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 x\cos 2k\pi x\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 x\sin 2k\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k\pi},$$

ahol felhasználtuk az alábbi integrálokat:

$$\int_0^1 x \cos 2k\pi x \,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[x \frac{\sin 2k\pi x}{2k\pi}\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{\sin 2k\pi x}{2k\pi} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 = \frac{1-1}{(2k\pi)^2} = 0$$

$$\int_0^1 x \sin 2k\pi x \,\mathrm{d}x = \left[-x \frac{\cos 2k\pi x}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos 2k\pi x}{2k\pi} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{-1}{2k\pi} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2k\pi x}{(2k\pi)^2}\right]_0^1}_{0} = -\frac{1}{2k\pi}.$$

Innen a Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

15) Legyen $f(x) = x^2$, ha $-1 < x \leq 1$ és $f(x + 2k) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$. Állítsuk elő a Fourier-sorát!

A függvény páros, tehát $b_k = 0$, a periódus $2l = 2$, azaz $l = 1$. Az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$a_k = 2 \int_0^1 x^2 \cos k\pi x \,\mathrm{d}x = 2 \underbrace{\left[x^2 \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_0^1}_{0} - 2 \int_0^1 2x \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \,\mathrm{d}x =$$

$$= 4 \left[x \frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\right]_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{\cos k\pi x}{(k\pi)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k \cdot 4}{k^2\pi^2} + 4 \underbrace{\left[\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^3}\right]_0^1}_{0} = \frac{(-1)^k \cdot 4}{k^2\pi^2}.$$

A Fourier-sor ezzel:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos k\pi x}{k^2}.$$