Kétváltozós függvények ábrázolása síkmetszetek képzése által

1) Ábrázoljuk a $z = x^2 + y^2$ felületet!
Megoldás:

 - Az $[x, y]$ síkkal párhuzamos síkokkal ($z = c$) képzett metszetek körök: $x^2 + y^2 = c$, tehát a felület z tengelyű forgásfelület;
 - Az $[x, z]$ koordinátasíkban $y = 0$, tehát a síkmetszet egyenlete $z = x^2$, azaz parabola;
 - Az $[y, z]$ koordinátasíkban $x = 0$, tehát a síkmetszet egyenlete $z = y^2$, azaz parabola;

 Tehát a felület z tengelyű **forgásparaboloid**, amely az origóban érinti az $[x, y]$ síkot: $z = 0$-nál $x^2 + y^2 = 0$ (0 sugarú kör).

2) Ábrázoljuk az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ felületet!
Megoldás:
A felület egy 1 sugarú **gömb**, mert mindhárom koordinátasíkkal való metszet kör: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.

3) Ábrázoljuk a $z^2 = x + y$ felületet!
Megoldás:

 - Az $[x, y]$ síkmetszet: $z = 0$, tehát $x + y = 0$, azaz egyenes;
 - Az $[x, z]$ síkmetszet: $y = 0$, tehát $z^2 = y$, azaz parabola;
 - Az $[y, z]$ síkmetszet: $x = 0$, tehát $z^2 = x$, azaz parabola.

 A felület ún. **parabolikus henger**.

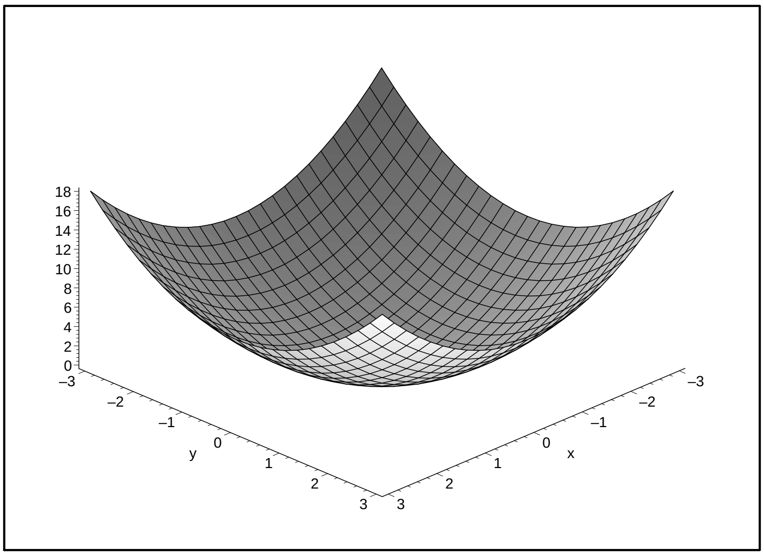
4) Ábrázoljuk a $z = \cos(x + \sqrt{3}y)$ felületet!
Megoldás:Koszinusz vezérgörbéjű henger

5) Ábrázoljuk a $z = \exp x + y$ felületet!
Megoldás:Exponenciális vezérgörbéjű henger, az alkotók az $y = -x$ egyenessel párhuzamosak.

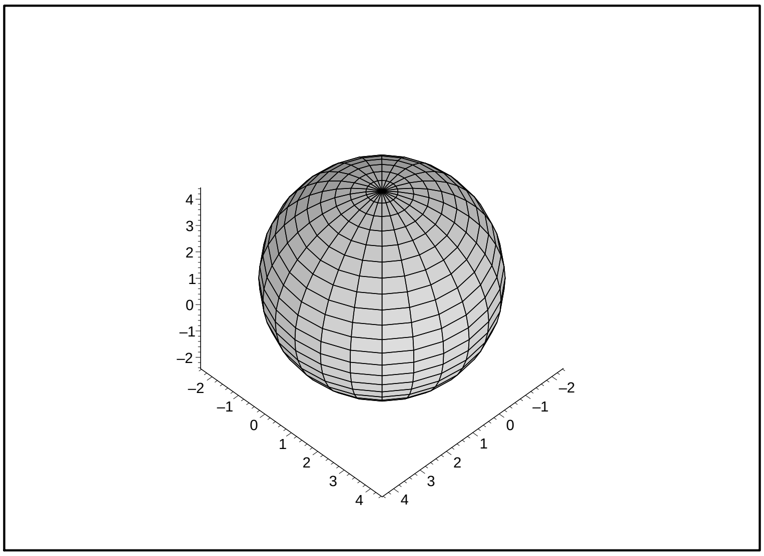
6) Ábrázoljuk a $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ felületet!
Megoldás:z tengelyű forgásfelület, melynek meridiángörbéje: $z = \ln x$.

7) Ábrázoljuk a $x^2 - y^2 = 1$ felületet!
Megoldás:Hiperbolikus henger, alkotói a z tengellyel párhuzamosak.

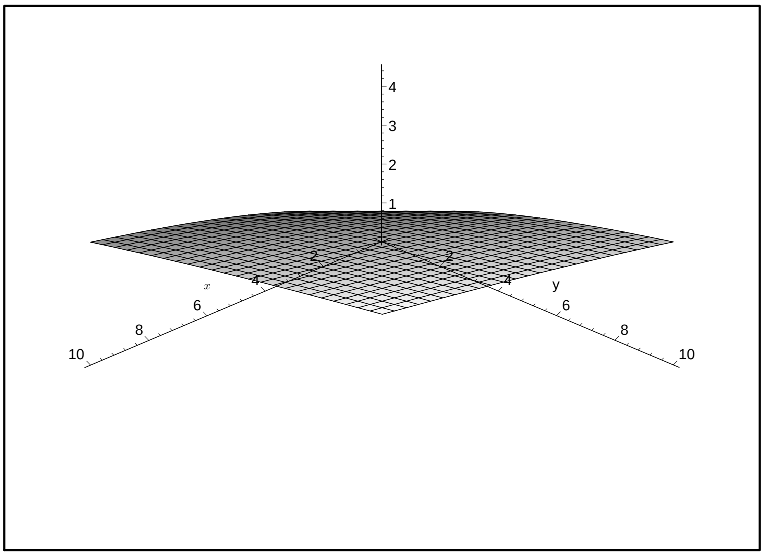
8) Ábrázoljuk a $z = \exp -(x^2 + y^2)$ felületet!
Megoldás:z tengelyű forgásfelület, melynek meridiángörbéje: $z = \exp -x^2$.



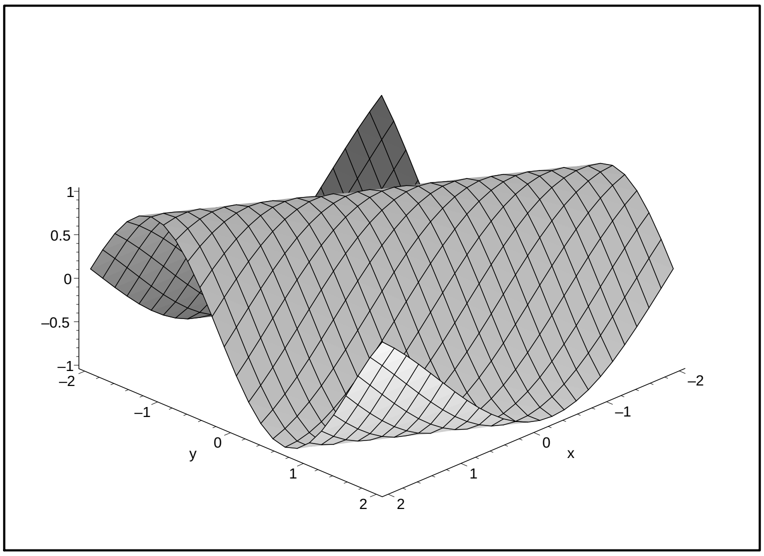
1. ábra. Az 1. feladat megoldása



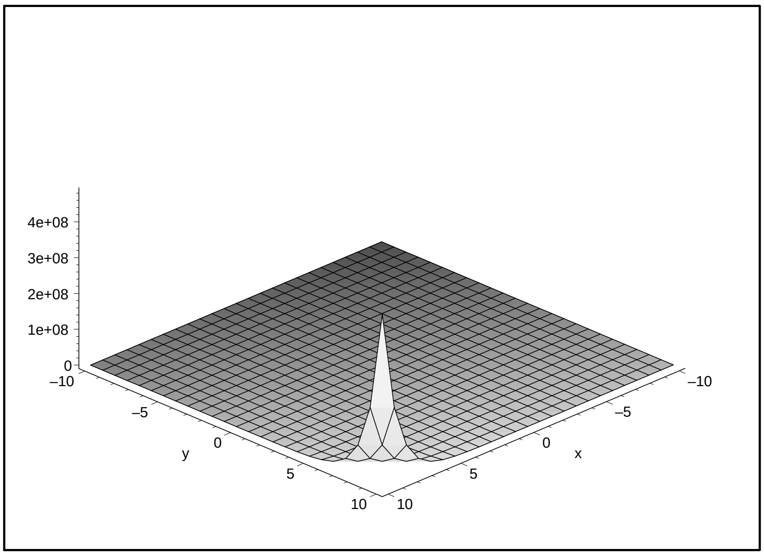
2. ábra. A 2. feladat megoldása



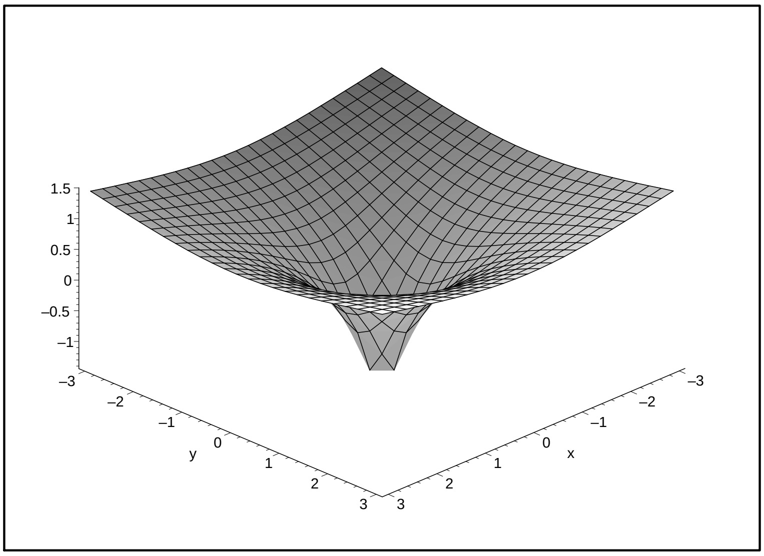
3. ábra. A 3. feladat megoldása



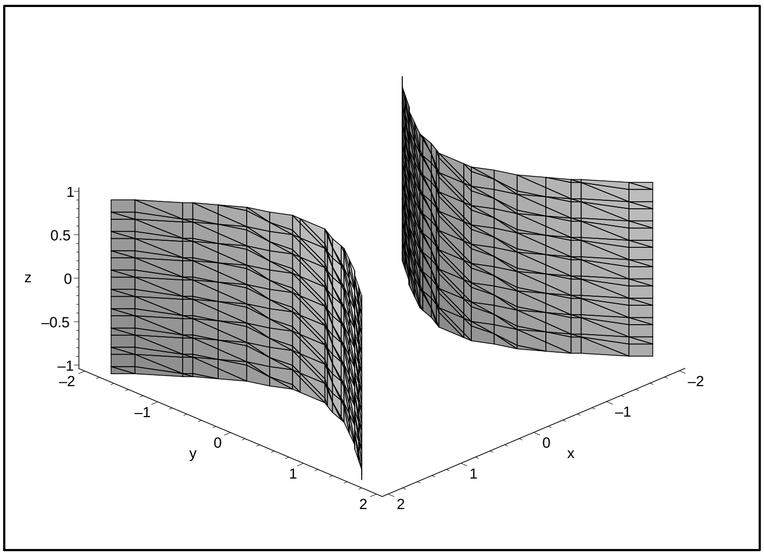
4. ábra. A 4. feladat megoldása



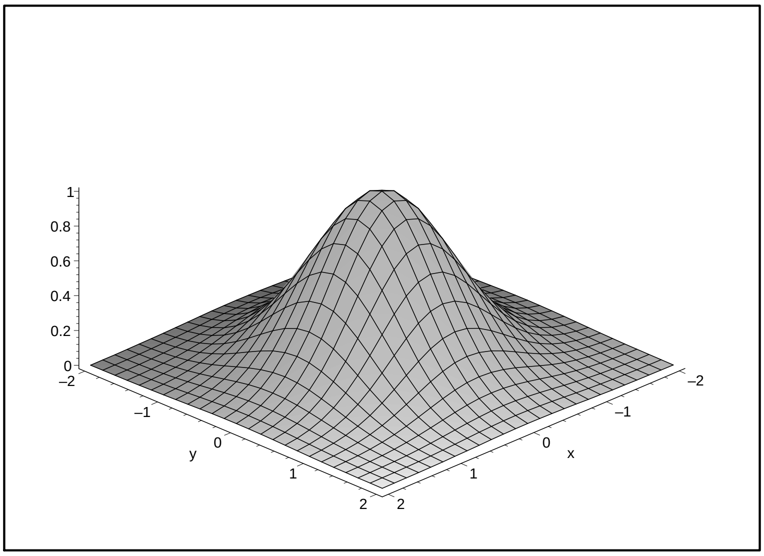
5. ábra. Az 5. feladat megoldása



6. ábra. A 6. feladat megoldása



7. ábra. A 7. feladat megoldása



8. ábra. A 8. feladat megoldása

Kétváltozós függvények határértéke és folytonossága

Definíció. Az $f(x,y)$ kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban a **határértéke** A, ha minden tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy minden $|x - x_0| < \delta$ és $|y - y_0| < \delta$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő (x,y) pontra $|f(x,y) - A| < \varepsilon$. Jelölés:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

Ezzel ekvivalens definíció: Az $f(x,y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban A a határértéke, ha bármely, az (x_0, y_0) ponthoz konvergáló (x_n, y_n) értékrendszer (sorozat) mellett az $f(x_n, y_n)$ sorozat A-hoz konvergál.
Ez azt jelenti, hogy ha az $f(x,y)$ kétváltozós kifejezésben y helyébe tetszőleges olyan $y = y(x)$ függvényt helyettesítünk, amelyre $y(x_0) = y_0$, az ilyen módon kapott $f(x, y(x))$ egyváltozós függvénynek mindig az A szám a határértéke az $x = x_0$ helyen.

Definíció. Az $f(x,y)$ függvény az (x_0, y_0) pontban **folytonos**, ha

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Feladatok

9) Határozzuk meg az $f(x,y) = \dfrac{xy-1}{y+1}$ kétváltozós függvény határértékét, ha $x \to 3$ és $y \to \infty$.

Megoldás: Közlekedjünk a szóban forgó helyhez az $y = \dfrac{1}{x-3}$ görbén. Erre teljesül, hogy $x \to 3$ esetén $\dfrac{1}{x-3} \to \infty$. Tehát vizsgálandó az

$$f_1(x) = \frac{x\frac{1}{x-3} - 1}{\frac{1}{x-3} + 1} = \frac{\frac{x-x+3}{x-3}}{\frac{1+x-3}{x-3}} = \frac{3}{x-2}$$

függvény határértéke $x \to 3$ esetén:

$$\lim_{x\to 3} f_1(x) = \lim_{x\to 3} \frac{3}{x-2} = 3.$$

Vagyis, ha van határértéke a kétváltozós függvénynek az $x_0 = 3$, $y_0 = \infty$ helyen, akkor az csak 3 lehet. Az első definíció alapján igazoljuk, hogy a 3 valóban határérték:

$$\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad \text{és} \quad y > N.$$

Valóban, ugyanis:

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right| = \left|\frac{xy-1-3y-3}{y+1}\right| = \left|\frac{(x-3)y-4}{y+1}\right| < |x-3| + \left|\frac{4}{y}\right| < \delta + \frac{4}{N} < \varepsilon.$$

10) Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\dfrac{x^2}{x+y}}$$

Megoldás: A függvény logaritmusának a határértékét fogjuk kiszámítani:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}} \frac{x^2}{x+y} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}} \frac{x}{x+y} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1,$$

ugyanis:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1, \text{ mert } \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e, \text{ ha } x\to\infty;$$

továbbá:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}} \frac{x}{x+y} = 1, \text{ mert } \left|\frac{x}{x+y}-1\right| = \left|\frac{x-x-y}{x+y}\right| = \left|\frac{-y}{x+y}\right| < \varepsilon,$$

$$\text{ha } 0-\delta < y < 0+\delta \text{ és } x \text{ elég nagy.}$$

11) Határozzuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(x^2+y^2\right) e^{-(x+y)}$$

Megoldás: Igaz a következő egyenlőtlenség:

$$0 < \left(x^2+y^2\right) e^{-(x+y)} < (x+y)^2 e^{-(x+y)}.$$

Tehát, ha igaz, hogy helyettesítéssel:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} (x+y)^2 e^{-(x+y)} = \lim_{u\to\infty} u^2 e^{-u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^2}{e^u}.$$

L'Hospital szabállyal belátható, hogy ez a határérték 0.

12) Van-e határértéke a $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ kétváltozós függvénynek az $x=0$, $y=0$ helyen?

Megoldás: A (0,0) ponttól különböző helyeken a függvénynek van értelme. A határértéket az $y = mx$ egyenes mentén keresve:

$$z = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2} \to 0, \text{ ha } x \to 0.$$

A határértéket az $x = y^2$ parabola mentén keresve

$$z = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Ebből következik, hogy a tekintett függvénynek a (0,0) helyen nincs határértéke.

Parciális deriváltak, láncszabály

13) Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények x és y változók szerinti parciális deriváltjait.

a) $f(x, y) = e^{x^2y} - 2x^2y^3 \sin(x + y)$

Megoldás:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x^2y} \cdot 2xy - \left(4xy^3 \sin(x + y) + 2x^2y^3 \cos(x + y)\right) = 2xy \left\{e^{x^2y} - 2y^2 \sin(x + y) - xy^2 \cos(x + y)\right\}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{x^2y} \cdot x^2 - \left(6x^2y^2 \sin(x + y) + 2x^2y^3 \cos(x + y)\right) = x^2 \left\{e^{x^2y} - 6y^2 \sin(x + y) - 2y^3 \cos(x + y)\right\}$$

b) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tan} \sqrt{\frac{y}{x}} = \operatorname{arc\,tan} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

Megoldás:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{\frac{x+y}{x}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2(x + y)}\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = \frac{1}{2(x + y)}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

c) $z = x^y$

Megoldás:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ kiszámítása a logaritmikus deriválás szerint:

$$\begin{aligned}\ln z &= y \ln x \\ \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} &= \ln x \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= z \ln x = x^y \ln x\end{aligned}$$

d) $f(x,y) = x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 12y^3 + 5x - 6y + 7$

Megoldás:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 5 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= -5x^2 + 6xy - 36y^2 - 6\end{aligned}$$

14) A $z(x,y)$ függvényt az $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$ egyenlőség implicite határozza meg. Számítsuk ki a $z(x,y)$ függvény parciális deriváltjait!

Megoldás:

Az x szerinti parciális deriválásnál y-t állandónak tekintjük, így $z(x,y)$ csak x függvénye:

$$\begin{aligned}\cos y + y(-\sin z)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\cos x - z\sin x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x}(\cos x - y\sin z) = z\sin x - \cos y \\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}\end{aligned}$$

Az y szerinti parciális deriválásnál x-et állandónak tekintjük, így $z(x,y)$ csak y függvénye:

$$\begin{aligned}-x\sin y + \cos z - y\sin z\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\cos x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(\cos x - y\sin z) = x\sin y - \cos z \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}\end{aligned}$$

15) $e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} = xyz$ implicite haározza meg a $z(x,y)$ függvényt. Számítsuk ki a parciális deriváltjait!

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
ye^{xy} + e^{yz}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right) + e^{zx}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right) &= yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial z}{\partial x}\left(ye^{yz} + xe^{zx} - xy\right) &= yz - ye^{xy} - ze^{zx} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{yz - ye^{xy} - ze^{zx}}{ye^{yz} + xe^{zx} - xy}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
xe^{xy} + e^{yz}\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + e^{zx}\left(x\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} \\
\frac{\partial z}{\partial y}\left(ye^{yz} + xe^{zx} - xy\right) &= xz - xe^{xy} - ze^{yz} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xz - xe^{xy} - ze^{yz}}{ye^{yz} + xe^{zx} - xy}
\end{aligned}
$$

16) Mutassuk meg, hogy az $z(x,y)$ függvény kielégíti a megadott differenciál-egyenletet!

a)

$$
z(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\ln\frac{x}{y} \qquad\qquad xz'_x + yz'_y = 2z
$$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln\frac{x}{y} + \left(x^2 + y^2\right)\frac{y}{x}\frac{1}{y} = 2x\ln\frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{x} \\
z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\ln\frac{x}{y} + \left(x^2 + y^2\right)\frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\ln\frac{x}{y} - \frac{x^2 + y^2}{y}
\end{aligned}
$$

$$
xz'_x + yz'_y = 2\left(x^2 + y^2\right)\ln\frac{x}{y} + \left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right) = 2\left(x^2 + y^2\right)\ln\frac{x}{y} = 2z
$$

b)

$$
z(x,y) = xy + xe^{\frac{y}{x}} \qquad\qquad xz'_x + yz'_y = xy + z
$$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{\frac{y}{x}} + e^{\frac{y}{x}}x\left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}} \\
z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = x + xe^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x} = x + e^{\frac{y}{x}}
\end{aligned}
$$

$$
xz'_x + yz'_y = xy + xe^{\frac{y}{x}} - ye^{\frac{y}{x}} + xy + ye^{\frac{y}{x}} = xy + z
$$

c)
$$z(x,y)=\frac{y^2-x^3-xy^2}{x} \qquad\qquad xz'_x+yz'_y=z-x^2-y^2$$

Megoldás:

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\left(-3x^2-y^2\right)x-y^2+x^3+xy^2}{x^2}=\frac{-3x^3-xy^2-y^2+x^3+xy^2}{x^2}$$
$$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-2xy}{x}$$

$$xz'_x+yz'_y=\frac{-3x^3-xy^2-y^2+x^3+xy^2+2y^2-2xy^2}{x}=$$
$$\frac{y^2-x^3-xy^2}{x}+\left(-x^2-y^2\right)=z-x^2-y^2$$

Iránymenti deriválás

Az $f(x,y,z)$ függvénynek az (x_0,y_0,z_0) pontban az $\mathbf{e}(e_1,e_2,e_3)$ irányban vett iránymenti deriváltja ($|\mathbf{e}|=1$):

$$\left[\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \mathbf{e}}\right]_{(x_0,y_0,z_0)}=\mathbf{e}\cdot \operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)=$$
$$e_1\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+e_2\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+e_3\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}$$

Kétváltozós függvény nek, $f(x,y)$-nak az $\mathbf{e}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ irányban vett iránymenti deriváltja az (x_0,y_0) helyen:

$$f'_\alpha(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha$$

17) Számítsuk ki a $z=\ln\left(x^2+xy\right)$ függvény iránymenti deriváltját az $\alpha=150^\circ$ irányban!

Megoldás:

$$\cos 150^\circ=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 150^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

Parciális deriváltak:

$$f'_x=\frac{1}{x^2+xy}(2x+y)=\frac{2x+y}{x^2+xy}$$
$$f'_y=\frac{x}{x^2+xy}$$

Tehát:

$$f'_\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2x+y}{x^2+xy} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+xy}$$

18) Számítsuk ki a $z = x^3 - 3xy^2 + 4y^4$ függvény differenciálhányadosát az $\alpha =$ $= 45°$ irányban!

Megoldás:

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Parciális deriváltak:

$$z'_x = 3x^3 - 3y^2$$
$$z'_y = -6xy + 16y^3$$

Tehát:

$$z'_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3x^2 - 3y^2\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-6xy + 16y^3\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3x^2 - 3y^2 - 6xy + 16y^3\right)$$

19) Számítsuk ki a $z = y \ln x$ függvény $\alpha = 60°$ irányban vett differenciálhányadosát az $x = 2$, $y = -1$ helyen!

Megoldás:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$
$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Parciális deriváltak:

$$z'_x = \frac{y}{x}$$
$$z'_y = \ln x$$

Tehát:

$$z'_\alpha(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln x$$
$$z'_\alpha(2,-1) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$$

20) Határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját a megadott pontban és irányban!

a) $f(x,y) = x^2 + 3y^2$, $P_0(-2{,}1)$, $\alpha = 30°$

Megoldás: $f'_x = 2x$, $f'_y = 6y$; $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$; $f'_x(-2{,}1) = -4$, $f'_y(-2{,}1) = 6$. Tehát:

$$f'_\alpha(-2{,}1) = -4\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\frac{1}{2} = -2\sqrt{3} + 3$$

b) $f(x,y) = \cosh^2 xy - \operatorname{arc\,tan}\dfrac{y}{x}$, $P_0(2,-1)$, $\alpha = 120°$

Megoldás:

$$\cos 120° = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'_x = 2y \sinh xy \cosh xy + \frac{\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = y \sinh 2xy + \frac{\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{1}{2e^4} + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{5}$$

$$f'_y = 2x \sinh xy \cosh xy - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = x \sinh 2xy + \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{e^4} - e^4 - \frac{2}{5}$$

(ugyanis: $\sinh 2xy = \dfrac{e^{2xy} + e^{-2xy}}{2} = \dfrac{e^{-4} + e^4}{2}$) Tehát:

$$f'_\alpha(-2{,}1) = \left\{-\frac{1}{2e^4} + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{5}\right\}\left(-\frac{1}{2}\right) + \left\{\frac{1}{e^4} - e^4 - \frac{2}{5}\right\}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $P_(1{,}1)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

Megoldás: $\mathbf{v}^2 = 9 + 4 = 13$, így $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $f'_x =$ $= 2x \to f'_x(P_0) = 2$, $f'_y = -2y \to f'_y(P_0) = -2$. Tehát:

$$f'_\alpha(P_0) = \frac{6}{\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

d) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P_0(1{,}0{,}1)$, $\mathbf{v} = (3{,}2,-5)$ **Megoldás:** $\mathbf{v}^2 = 9 + 4 +$ $+ 25 = 38$, így $\cos\alpha_1 = \dfrac{3}{\sqrt{38}}$, $\cos\alpha_2 = \dfrac{2}{\sqrt{38}}$, $\cos\alpha_3 = \dfrac{-5}{\sqrt{38}}$, valamint

$$f'_x = -2xe^{-(x^2+y^2)} \qquad f'_x(P_0) = -\frac{2}{e}$$

$$f'_y = -2ye^{-(x^2+y^2)} \qquad f'_x(P_0) = 0$$

$$f'_z = -1$$

Tehát

$$f'_\alpha(P_0) = f'_x(P_0)\cos(\alpha_1) + f'_y(P_0)\cos(\alpha_2) + f'_z(P_0)\cos(\alpha_3) = -\frac{6}{e\sqrt{38}} + \frac{5}{\sqrt{38}}.$$

Felületi görbék érintői, érintősík

A $z = f(x, y)$ felületen haladó görbét az (x, y) síkon megadott $x = x(t)$, $y = y(t)$ görbe oly módon határoz meg, hogy e síkgörbére állított, z-vel párhuzamos alkotójú henger és a $z = f(x, y)$ felület metszésvonala képezi a felületi görbét:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}f(x(t), y(t)).$$

Ennek érintővektora a $t = t_0$-nak megfelelő helyen: $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$:

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{i}\dot{x}(t_0) + \mathbf{j}\dot{y}(t_0) + \mathbf{k}\left[f'_x(x_0, y_0)\dot{x}(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\dot{y}(t_0)\right].$$

Ha speciálisan az $x = x(t)$, $y = y(t)$ görbe a következő alakú egyenes:

$$x = x_0 + t\cos\alpha$$
$$y = y_0 + t\sin\alpha,$$

akkor a megfelelő térgörbe érintővektora a $t_0 = 0$ pontban:

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha + \mathbf{k}\left[f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha\right].$$

A $\mathbf{k}$ együtthatója éppen az $f(x, y)$-nak α irányban vett iránymenti deriváltja. Ebben az esetben az érintő egyenlete:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha} = \frac{z - z_0}{f'_\alpha}.$$

Az $u(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ függvény gradiense:

$$\mathrm{grad}\, u(x, y, z) = -f'_x\mathbf{i} - f'_y\mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k}.$$

A felületi görbe érintővektora:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \left[f'_x\dot{x} + f'_y\dot{y}\right]\mathbf{k}.$$

Skaláris szorzatuk:

$$(\mathrm{grad}\, u)\dot{\mathbf{r}}(t) = -f'_x\dot{x}f'_y\dot{y} + f'_x\dot{x} + f'_y\dot{y} = 0,$$

tehát $\mathrm{grad}\, u \perp \dot{\mathbf{r}}(t)$, ahol $\dot{\mathbf{r}}(t)$ a felület egy pontján áthaladó tetszőleges felületi görbe érintője lehet. Ebből következik, hogy egy felületi ponton áthaladó felületi görbék érintői egy síkban vannak; ez a felület adott pontbeli érintősíkja. Az érintősík normálvektora $\mathrm{grad}\, u$ vektor. Tehát az érintősík egyenlete:

$$f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

A $\Phi(x,y,z)=0$ (implicit) alakú felületen haladó $\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}x(t)+\mathbf{j}y(t)+\mathbf{k}z(t)$ térgörbe esetén $\Phi(x(t),y(t),z(t))=0$.

$$\frac{d\Phi}{dt}=\Phi'_x\dot{x}(t)+\Phi'_y\dot{y}(t)+\Phi'_z\dot{z}(t)=0,$$

tehát az $\mathbf{n}(\Phi'_x,\Phi'_y,\Phi'_z)$ vektor merőleges az $\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{i}\dot{x}(t)+\mathbf{j}\dot{y}(t)+\mathbf{k}\dot{z}(t)$ görbeérintőre, az érintővektorok az $\mathbf{n}$ normálvektorú érintősíkban vannak.
Az (x_0,y_0,z_0) pontbeli érintősík egyenlete:

$$\Phi'_x(x-x_0)+\Phi'_y(y-y_0)+\Phi'_z(z-z_0)=0.$$

A $\Phi(x,y,z)=0$ és a $\Psi(x,y,z)=0$ felületek metszésvonalát a két egyenletből adódó egyenletrendszer jellemzi. A metszésvonal érintősíkja:

$$\mathbf{t}=\mathbf{n}_\Phi\times\mathbf{n}_\Psi=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z\\ \Psi'_x & \Psi'_y & \Psi'_z\end{vmatrix}$$

Ha a metszésvonal pl. x szerint paraméterezhető, azaz leírható mint $\Phi(x,y(x),z(x))$, illetve $\Psi(x,y(x),z(x))$, akkor

$$\frac{d\Phi}{dx}=\Phi'_x+\Phi'_y y'+\Phi'_z z';$$
$$\frac{d\Psi}{dx}=\Psi'_x+\Psi'_y y'+\Psi'_z z'.$$

Ekkor a metszésvonal x szerint paraméterezett érintője: $\mathbf{r}'(x)=1\cdot\mathbf{i}+y'(x)\mathbf{j}+$ $+z'(x)\mathbf{k}$, ahol $y'(x)$ és $z'(x)$ a fenti egyenletrendszerből kiszámítható.

Feladatok

21) A $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ felületnek a $P(0{,}1{,}0)$ pontján áthaladó, z tengellyel párhuzamos és az x tengellyel $60°$-os szöget bezáró síkkal elmetszettük a felületet. Határozzuk meg a metszetgörbe érintőjének egyenletrendszerét a P pontban.
Megoldás: A felület P pontjára: $x_0=0$, $y_0=1$, $z_0=ln(0+1)=0$. Kiszámítjuk az iránymenti deriváltat:

$$\cos 60°=\frac{1}{2};\qquad \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'_x=\left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_{(0,1)}=0;\qquad f'_y=\left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_{(0,1)}=2;$$

$$f'_\alpha = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}.$$

Az érintő egyenletrendszere:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{z}{\sqrt{3}}.$$

22) Határozzuk meg a $z = \sin xy$ felület érintősíkjának egyenletét az $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = 2$ pontban.

Megoldás: $z_0 = \sin \frac{\pi}{3} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A parciális deriváltak:

$$f'_x = y \cos xy|_{(\frac{\sqrt{3}}{2},2)} = -1; \qquad f'_y = x \cos xy|_{(\frac{\sqrt{3}}{2},2)} = -\frac{\pi}{6}$$

Tehát az érintősík egyenlete:

$$-\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}(y-2) - \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

23) Melyek a $z = 2x^2 + 5y^2 - 3x + 2y - 1$ felületnek azok a pontjai, ahol az érintősík párhuzamos a $2x - y + 5z - 25 = 0$ síkkal?

Megoldás: A felület normálisa: $\mathbf{n}_1 = -z'_x\mathbf{i} - z'_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Az adott sík normálisa: $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, illetve $\mathbf{n}_2^* = \frac{2}{5}\mathbf{i} - \frac{1}{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Úgy kell megadnunk az (x_0, y_0, z_0) pontot, hogy ez a két vektor párhuzamos legyen egymással. Kiszámítjuk a parciális deriváltakat:

$$z'_x = 4x - 3; \qquad z'_y = 10y + 2.$$

Összevetve a sík normálvektorának egyenletében szereplő együtthatókkal:

$$4x_0 - 3 = -\frac{2}{5}; \qquad 10y_0 + 2 = \frac{1}{5}, \quad \text{tehát}$$
$$x_0 = \frac{13}{20} = 0{,}65; \qquad y_0 = -\frac{9}{50} = -0{,}18; \quad \rightarrow \quad z_0 = -2{,}303.$$

Teljes differenciál számítása

A $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény teljes differenciálja:

$$dz = df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

A $dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ kifejezés teljes differenciál, ha

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

24) Számítsuk ki a $z = \ln\sin\left(x^2+y^2\right)$ teljes differenciálját!

Megoldás:

$$z'_x = \frac{2x}{\sin\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right) = 2x\cot\left(x^2+y^2\right)$$
$$z'_y = \frac{2y}{\sin\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right) = 2y\cot\left(x^2+y^2\right)$$

Tehát $dz = 2\cot\left(x^2+y^2\right)\{xdx+ydy\}$.

25) Állapítsuk meg a $\sin y e^{x\sin y}dx + x\cos y e^{x\sin y}dy$ kifejezésről, hogy teljes differenciál-e!

Megoldás: $P(x,y) = \sin y e^{x\sin y}$; $Q(x,y) = x\cos y e^{x\sin y}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y e^{x\sin y} + x\cos y\sin y e^{x\sin y};$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y e^{x\sin y} + x\cos y\sin y e^{x\sin y}.$$

Mivel tehát $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, így az adott kifejezés teljes differenciál.

Magasabbrendű deriváltak számítása

26) Deriváljuk le kétszer x és y szerint a következő függvényt:

$$z = e^x\cos y - x\ln y$$

Megoldás: Első deriváltak:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = e^x\cos y - \ln y;$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x\sin y - x\frac{1}{y}.$$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x\cos y;$$
$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x\cos y - x\frac{1}{y^2}.$$

A vegyes parciális deriváltak:

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -e^x\sin y - \frac{1}{y};$$
$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -e^x\sin y - \frac{1}{y}.$$

Látható, hogy a vegyes parciális deriváltak megegyeznek.

27) Számítsuk ki a $z = e^x \cos y - x \ln y$ függvény x, illetve y szerinti harmadik parciális deriváltját!

Megoldás:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y - \ln y\right)\right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) = e^x \cos y;$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-e^x \sin y - \frac{x}{y}\right)\right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-e^x \cos y + \frac{x}{y^2}\right) = e^x \sin y - 2\frac{x}{y^3}.$$

28) Számítsuk ki a $z = e^{x^2+y^2}$ kétváltozós függvény másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás:

$$z'_x = 2xe^{x^2+y^2}; \qquad z'_y = 2ye^{x^2+y^2};$$
$$z''_{xx} = 2e^{x^2+y^2} + (2x)^2 e^{x^2+y^2};$$
$$z''_{yy} = 2e^{x^2+y^2} + (2y)^2 e^{x^2+y^2};$$
$$z''_{xy} = z''_{yx} = 4xye^{x^2+y^2}.$$

29) Igazoljuk, hogy a $z = x^3 - 3xy^2 + 2x$ függvény x és y szerinti másodrendű parciális deriváltjainak összege zérus, vagyis a függvény kielégíti a

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0$$

ún. parciális differenciálegyenletet (ekkor z-t *harmonikus függvény*nek nevezzük).

Megoldás:

$$z'_x = 3x^2 - 3y^2 + 2; \qquad z'_y = -6xy;$$
$$z''_{xx} = 6x;$$
$$z''_{yy} = -6x;$$
$$z''_{xx} + z''_{yy} = 6x - 6x = 0.$$

Iránymenti második derivált számítása

A $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény α iránymenti első deriváltja:

$$\frac{df(x,y)}{d\alpha} = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha.$$

Ennek az α irány menti deriváltja az α irány menti második derivált:

$$\frac{d^2 f(x,y)}{d\alpha^2} = D_{\alpha\alpha} f(x,y) = f''_{xx}(x,y)\cos^2\alpha + 2f''_{xy}(x,y)\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}(x,y)\sin^2\alpha.$$

30) Számítsuk ki a $z = \ln(x^2+xy)$ függvény α irány menti második deriváltját, ha $\alpha = 150°$, valamint $x_0 = 1$, $y_0 = 8$!

Megoldás:

$$z'_x = \frac{2x+y}{x^2+xy}; \qquad z'_y = \frac{x}{x^2+xy};$$

$$z''_{xx} = \left.\frac{-2x^2-2xy-y^2}{(x^2+xy)^2}\right|_{(1,8)} = -\frac{26}{81};$$

$$z''_{yy} = \left.\frac{-x^2}{(x^2+xy)^2}\right|_{(1,8)} = \frac{7}{81};$$

$$z''_{xy} = \left.\frac{xy-x^2}{(x^2+xy)^2}\right|_{(1,8)} = -\frac{1}{81};$$

$$\frac{d^2 z(x,y)}{d\alpha^2} = D_{\alpha\alpha} f(x,y) = \frac{-2x^2-2xy-y^2}{(x^2+xy)^2}\cos^2\alpha + 2\frac{xy-x^2}{(x^2+xy)^2}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{-x^2}{(x^2+xy)^2}\sin\alpha;$$

Mivel $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, illetve $\sin 150° = \frac{1}{2}$, így $\cos^2 150° = \frac{3}{4}$, $2\cos 150° \sin 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, illetve $\sin^2 150° = \frac{1}{4}$. Tehát:

$$\frac{d^2 z(x_0,y_0)}{d\alpha^2} = -\frac{26}{81}\frac{3}{4} - \frac{7}{81}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{81}\frac{1}{4} = -0{,}319.$$