Mátrixok

A *mátrix* számok, függvények, változók stb. téglalap alakú elrendezése, amely sorokra és oszlopokra tagolható. Jelölése: $\underline{\underline{A}} = [a_{ij}]$, ahol a_{ij} az i-edik sor j-edik elemét jelenti. Az n sorból és m oszlopból álló $\underline{\underline{A}}$ mátrix *típusa* (vagy *dimenziója*) $n \times m$, jele: $\underset{n\times m}{\underline{\underline{A}}}$. Általánosan:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Példák

1) 3×4-es mátrix és 5×2-es mátrix, valamint egy négyzetes mátrix felírása

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \\ 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Egységmátrix, zérusmátrix, sormátrix (1×6-os), oszlopmátrix (4×1-es)

Az egységmátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlójában 1-ek állnak (spec. diagonálmátrix):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zérusmátrix (nem feltétlenül négyzetes!):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sor- és oszlopmátrixok:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3) Mikor egyenlő egymással a következő két mátrix?

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \\ \pi & 7 \\ 1 & x^3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \\ u & v \\ \ln y & 27 \end{bmatrix}$$

$u = \pi$, $v = 7$, $y = e$ és $x = 3$ esetén egyenlőek.

4) Adott $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$, 3×4-es mátrixok. Számítsuk ki $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$; $5\underline{\underline{A}}$; $\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}}$; $-2\underline{\underline{A}}$ mátrixokat!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 1 \\ 9 & -1 & 5 & 10 \\ 6 & -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad 5\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 20 & 5 \\ 30 & -5 & 5 & 10 \\ 5 & -10 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad -2\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -10 & -4 & -8 & -2 \\ -12 & 2 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

5) Oldjuk meg a $2\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ mátrix egyenletet! (Az előző feladat $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ mátrixait felhasználva)

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} - 2\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -6 & -2 \\ -9 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

6) Számítsuk ki az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrixhoz tartozó $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^*$ illetve $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^*$ mátrixokat!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 11 \\ 6 & 2 & 13 \\ 11 & 13 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7) Szorozzuk össze mindkét sorrendben a következő sor- ill. oszlopmátrixot!

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 6 + 2 + 12 - 5 = 15 \qquad \text{(skaláris szorzat)}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 9 & 6 & 12 & -3 \\ 15 & 10 & 20 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{(diadikus szorzat)}$$

8) Végezzük el a következő szorzásokat!

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 4y - 5z \\ x - 3y + 2z \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z & -2x + 4y + 5z \\ u + 2v + 3w & -2u + 4v + 5w \end{bmatrix}$$

c) Összegző mátrixszal való szorzás

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(sorok összegzése)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{(oszlopok összegzése)}$$

9) Mutassuk meg, hogy az $\underline{s}(a, b, c)$ és $\underline{r}(x, y, z)$ vektorok vektoriális szorzata a következő mátrixszorzással is kiszámítható:

$$\underline{s} \times \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \underline{i}(bz - cy) + \underline{j}(cx - az) + \underline{k}(ay - bx)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cy+bz \\ cx-az \\ -bx+ay \end{bmatrix}$$

10) Permutáció-mátrixszal való szorzás

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\underline{\underline{P}}$-vel balról szorozva:

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az első sor a harmadikba, a második sor az elsőbe, a harmadik sor pedig a másodikba megy át.

b) $\underline{\underline{P}}$-vel jobbról szorozva:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Az első oszlopot a másodikba, a második oszlopot a harmadikba, a harmadik oszlopot pedig az elsőbe viszi át.

11) Az alábbi $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ mátrixra számítsuk ki az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$ szorzatokat!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -9 & 15 & -6 & -13 \\ 12 & -10 & 8 & 14 \\ -9 & 9 & -6 & -11 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -9 & 15 & -6 & -13 \\ 12 & -10 & 8 & 14 \\ -9 & 9 & -6 & -11 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$-ből nem következik $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ egyenlősége.

12) Mátrix elemi átalakításainak megvalósítása mátrixszorzással

a) *Sorcsere (egymás közötti) megvalósítása balról szorzással.*
Első sor $\rightarrow$ negyedikbe (és viszont)
Második sor $\rightarrow$ harmadikba (és viszont)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & -5 & -7 & -9 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -7 & -8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -5 & -7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

b) *Oszlopcsere (egymás közötti) megvalósítása jobbról szorzással.*
Első oszlop $\rightarrow$ harmadikba (és viszont)
Második oszlop $\rightarrow$ ötödikbe (és viszont)
Negyedik oszlop marad.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 9 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 8 & 3 \\ 8 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 12 & 6 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 9 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & 8 & -3 \\ 4 & 1 & 8 & 7 & 10 \\ 5 & 3 & 12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

c) *Sor ill. oszlop szorzása egy számmal*
Balról szorzás: 3. sor szorzása λ számmal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5\lambda & 7\lambda \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Jobbról szorzás: 2. oszlop szorzása λ számmal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda & 3 \\ 4 & \lambda & 2 \\ 1 & 2\lambda & 2 \\ -1 & 1\lambda & -1 \\ 3 & 4\lambda & 5 \end{bmatrix}$$

d) *Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i-edik sorához hozzáadjuk a j-edik sor λ-szorosát*
Az egységmátrixba $a_{ij} = \lambda$-t írunk a 0 helyébe és balról szorzunk (csak különböző sorok közötti művelet esetén!).

Harmadik sorhoz adjuk az első sor 6-szorosát: $a_{31} = 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 33 & 41 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

e) *Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix i-edik oszlopához hozzáadjuk a j-edik oszlop λ-szorosát*
Az egységmátrixba $a_{ji} = \lambda$-t írunk a 0 helyébe és jobbról szorzunk (csak különböző oszlopok közötti művelet esetén!).

Negyedik oszlophoz adjuk a második oszlop 5-szörösét: $a_{24} = 5$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 19 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 31 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 42 & 3 \end{bmatrix}$$

13) Szorozzuk meg az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrixot mindkét oldalról az $\underline{\underline{A}}^*$ transzponáltjával!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzások kiírva:

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l} \multicolumn{4}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\underline{\underline{A}}^*} & \\ \multicolumn{4}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\parallel} & \\ \cline{5-7} & & & & 1 & 5 & -3 & \\ & & & & 3 & -1 & 2 & \\ & & & & -2 & 0 & -2 & \\ \cline{2-7} & 1 & 3 & -2 & 14 & 2 & 7 & \\ \underline{\underline{A}} = & 5 & -1 & 0 & 2 & 26 & -17 & = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^* \\ & -3 & 2 & -2 & 7 & -17 & 17 & \\ \cline{2-7} \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|ccc|ccc|l}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\underline{\underline{A}}^*} & \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\parallel} & \\
\cline{5-7}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{3}{c|}{} & 1 & 3 & -2 & \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{3}{c|}{} & 5 & -1 & 0 & \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{3}{c|}{} & -3 & 2 & -2 & \\
\cline{2-7}
 & 1 & 5 & -3 & 35 & -8 & 4 & \\
\underline{\underline{A}} = & 3 & -1 & 2 & -8 & 14 & -10 & = \underline{\underline{A}}^* \, \underline{\underline{A}} \\
 & -2 & 0 & -2 & 4 & -10 & 8 & \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Látható, hogy $\underline{\underline{A}}^* \, \underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{A}}^*$, bár mind a kettő szimmetrikus mátrix.

14) Mutassuk meg az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ és $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixokra, hogy $(\underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{B}}^* \underline{\underline{A}}^*$!

$$\underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (\underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{B}})^* = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}}^* = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}}^* \underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

15) Determinánsok értékének meghatározása

a)

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (1-2) - (4-3) = -1 - 1 = -2$$

b)

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{-25} -1 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}_{25} +3 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}_{25} = -50 - 25 + 75 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}}_{11} -4 \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}_{34} +7 \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{-7} = 33 - 136 - 49 = -152$$

d)

$$\begin{vmatrix} 2 & \mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 5 & 4 & -\mathrm{i} \\ 6\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 8 \end{vmatrix} = 2\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 7 \end{vmatrix}}_{26} - \mathrm{i}\underbrace{\begin{vmatrix} 5 & -\mathrm{i} \\ 6\mathrm{i} & 7 \end{vmatrix}}_{29} + 3\mathrm{i}\underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \end{vmatrix}}_{-14\mathrm{i}} = 52-29\mathrm{i}+42 = 94-29\mathrm{i}$$

e)

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}}_{16+48-18+64=-18} - 5\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}}_{68-68-6=-6} + 7\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{60-51=9} = -90-30-63 = -183$$

16) Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ és $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ adott. Határozza meg azt az $\underline{\underline{X}}$ mátrixot, amely eleget tesz a

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} + 2\underline{\underline{X}}$$

mátrixegyenletnek!

Látható, hogy $\underline{\underline{X}}$ csakis 2×2-es lehet.

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a+3c & -2b+3d \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} + 2\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 5+2a & 2+2b \\ 1+2c & 3+2d \end{bmatrix}$$

A mátrixok egyenlősége miatt:

$$\begin{aligned} a+2c &= 5+2a \\ -2a+3c &= 1+2c \\ b+2d &= 2+2b \\ -2b+3d &= 3+2d \end{aligned}$$

Átalakítva az egyenleteket:

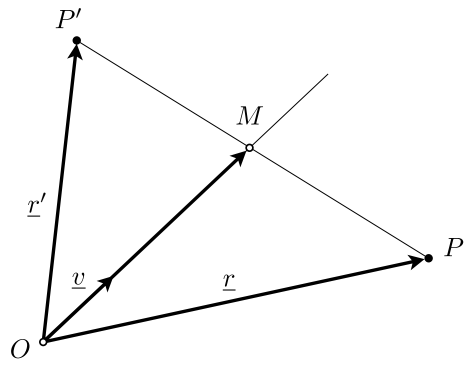
$$\left.\begin{aligned} -a+2c &= 5 \\ -2a+c &= 1 \end{aligned}\right\} a=1, \quad c=3$$

$$\left.\begin{aligned} -b+2d &= 2 \\ -2b+d &= 3 \end{aligned}\right\} b=-\frac{4}{3}, \quad d=\frac{1}{3}$$

Tehát

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

17) Határozzuk meg az origón áthaladó $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$ irányvektorú ($v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$) egyenesre vonatkozó tükrözés mátrixát. Mutassuk meg, hogy a kapott mátrix ortogonális és számítsuk ki a mátrixhoz tartozó determináns értékét!



Legyen az O origóból a tér egy P pontjába mutató helyvektor $\underline{r}(x, y, z)$, a P pont P' tükörképébe mutató helyvektor pedig $\underline{r}'(x', y', z')$.

Ekkor a $\underline{v}$ irányvektorú egyenesre való tükrözést az $\underline{r}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{r}$ egyenlettel írhatjuk fel, amely kiírva a vektorkomponenseket a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Az ábra alapján

$$\vec{OM} = \underline{v}(\underline{v}\,\underline{r}) = \frac{\underline{r} + \underline{r}'}{2}.$$

Ezt átrendezve

$$\underline{r}' = 2\underline{v}(\underline{v}\,\underline{r}) - \underline{r},$$

ami mátrixos alakban

$$\underline{\underline{r}}' = 2\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{v}}^*\underline{\underline{r}}) - \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{r}} = \Big\{2(\underline{\underline{v}}\,\underline{\underline{v}}^*) - \underline{\underline{E}}\Big\}\,\underline{\underline{r}}.$$

Kiírva a komponenseket:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \left\{ 2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1^2 - 1 & 2v_1v_2 & 2v_1v_3 \\ 2v_1v_2 & 2v_2^2 - 1 & 2v_2v_3 \\ 2v_1v_3 & 2v_2v_3 & 2v_3^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Az első oszlop önmagával vett skaláris szorzata:

$$\begin{aligned}
&\left(2v_1^2 - 1\right)^2 + 4v_1^2v_2^2 + 4v_1^2v_3^2 = \left(v_1^2 - v_2^2 - v_3^2\right)^2 + 4v_1^2v_2^2 + 4v_1^2v_3^2 = \\
&= v_1^4 + v_2^4 + v_3^4 - 2v_1^2v_2^2 - 2v_1^2v_3^2 + 2v_2^2v_3^2 + 4v_1^2v_2^2 + 4v_1^2v_3^2 = \\
&= v_1^4 + v_2^4 + v_3^4 + 2v_1^2v_2^2 + 2v_1^2v_3^2 + 2v_2^2v_3^2 = \\
&= \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right)^2 = 1
\end{aligned}$$

Az első és a második oszlop skaláris szorzata:

$$\begin{aligned}
&\left(2v_1^2 - 1\right)^2 (2v_1v_2) + (2v_1v_2)\left(2v_2^2 - 1\right)^2 + 4v_1v_2v_3^2 = \\
&= 4v_1^3v_2 - 2v_1v_2 + 4v_1v_2^3 - 2v_1v_2 + 4v_1v_2v_3^2 = \\
&= 4v_1v_2\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 1\right) = 0
\end{aligned}$$

A transzformációs mátrix determinánsa:

$$\begin{aligned}
\det\underline{\underline{A}} &= \left(2v_1^2 - 1\right)\left(2v_2^2 - 1\right)\left(2v_3^2 - 1\right) + 8v_1^2v_2^2v_3^2 + 8v_1^2v_2^2v_3^2 - \\
&- 4v_2^2v_3^2\left(2v_1^2 - 1\right)^2 - 4v_1^2v_3^2\left(2v_2^2 - 1\right)^2 - 4v_1^2v_2^2\left(2v_1^3 - 1\right)^2 = \\
&= 8v_1^2v_2^2v_3^2 - 4v_2^2v_3^2 - 4v_1^2v_3^2 - 4v_1^2v_2^2 + \overbrace{2v_1^2 + 2v_2^2 + 2v_3^2 - 1}^{1} + \\
&+ 8v_1^2v_2^2v_3^2 + 8v_1^2v_2^2v_3^2 - 8v_1^2v_2^2v_3^2 - 8v_1^2v_2^2v_3^2 - 8v_1^2v_2^2v_3^2 + \\
&+ 4v_2^2v_3^2 + 4v_1^2v_3^2 + 4v_1^2v_2^2 = 1
\end{aligned}$$

$\det\underline{\underline{A}} = 1$, tehát a transzformáció az alakzat orientációját nem változtatja meg.

$\underline{\underline{A}}$ ortogonális mátrix:

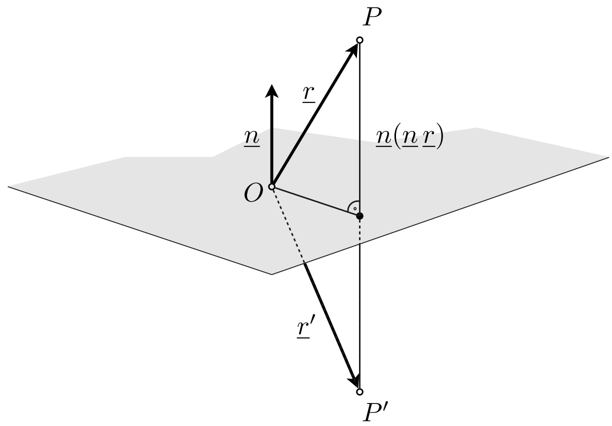
$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^*$$

Mivel $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus, teljesül, hogy

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}.$$

18) Határozzuk meg az origón áthaladó $\underline{n}(a, b, c)$ normálisú $(a^2 + b^2 + v^2 = 1)$ síkra vonatkozó tükrözés mátrixát. Mutassuk meg, hogy a kapott mátrix ortogonális és számítsuk ki a mátrixhoz tartozó determináns értékét!

Legyen az O origóból a tér egy P pontjába mutató helyvektor $\underline{r}(x, y, z)$, a P pont P' tükörképébe mutató helyvektor pedig $\underline{r}'(x', y', z')$.



Ekkor az $\underline{n}$ normálisú síkra való tükrözést az $\underline{r}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{r}$ egyenlettel írhatjuk fel, amely kiírva a vektorkomponenseket a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Az ábra alapján

$$\underline{r}' = \underline{r} - 2\underline{n}(\underline{n}\,\underline{r}),$$

ami mátrixos alakban

$$\underline{\underline{r}}' = \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{r}} - 2\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{n}}^*\underline{\underline{r}}) = \left\{\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{r}} - 2(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{n}}^*)\right\}\underline{\underline{r}}.$$

Kiírva a komponenseket:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Az első oszlop önmagával vett skaláris szorzata:

$$\begin{aligned} &\left(1-2a^2\right)^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 = \left(b^2 - c^2 - a^2\right)^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 = \\ &= \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Az első és a második oszlop skaláris szorzata:

$$\begin{aligned}
&\left(1-2a^2\right)^2(-2ab)+(-2ab)\left(1-2b^2\right)^2+4abc^2=\\
&=4a^3b-2ab+4ab^3-2ab+4abc^2=\\
&=4ab\left(a^2+b^2+c^2-1\right)=0
\end{aligned}$$

Minthogy $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus mátrix, igaz:

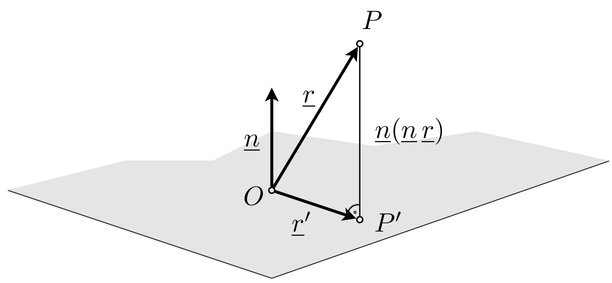
$$\underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{A}}^{*}=\underline{\underline{A}}$$

A transzformációs mátrix determinánsa:

$$\begin{aligned}
\det\underline{\underline{A}}=&\left(1-2a^2\right)\left(1-2b^2\right)\left(1-2c^2\right)-8a^2b^2c^2-8a^2b^2c^2-\\
&-4b^2c^2\left(1-2a^2\right)^2-4a^2c^2\left(1-2b^2\right)^2-4a^2b^2\left(1-2c^2\right)^2=\\
&=1-2a^2-2b^2-2c^2+4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2-\\
&-8a^2b^2c^2-8a^2b^2c^2-8a^2b^2c^2+8a^2b^2c^2+8a^2b^2c^2+8a^2b^2c^2-\\
&-4a^2b^2-4a^2c^2-4b^2c^2=1-2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\\
&=-1
\end{aligned}$$

$\det\underline{\underline{A}}=-1$, tehát a transzformáció megváltoztatja az alakzat orientációját („jobb kesztyű → bal kesztyű”).

19) Határozzuk meg az origón áthaladó $\underline{n}(a,b,c)$ normálisú $(a^2+b^2+v^2=$ $=1)$ síkra való merőleges vetítés mátrixát. Számítsuk ki a mátrixhoz tartozó determináns értékét!



Legyen az O origóból a tér egy P pontjába mutató helyvektor $\underline{r}(x,y,z)$, a P pont P' képébe mutató helyvektor pedig $\underline{r}'(x',y',z')$.

Ekkor az $\underline{n}$ normálisú síkra való merőleges vetítést az $\underline{r}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{r}$ egyenlettel írhatjuk fel, amely kiírva a vektorkomponenseket a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Az ábra alapján

$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{n}(\underline{n}\,\underline{r}),$$

ami mátrixos alakban

$$\underline{\underline{r}}' = \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{r}} - \underline{\underline{n}}(\underline{\underline{n}}^*\underline{\underline{r}}) = \left\{\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{r}} - (\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{n}}^*)\right\}\underline{\underline{r}}.$$

Kiírva a komponenseket:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix determinánsa:

$$\begin{aligned} \det \underline{\underline{A}} = {} & \left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right) - a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 - \\ & - b^2c^2\left(1-a^2\right)^2 - a^2c^2\left(1-b^2\right)^2 - a^2b^2\left(1-c^2\right)^2 = \\ & = 1 - \left(2a^2+2b^2+2c^2\right) + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - \\ & - a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 - \\ & - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0 \end{aligned}$$

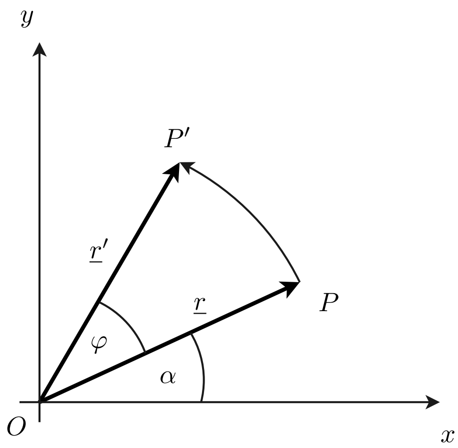
A mátrix szinguláris, mivel a determinánsa 0. Nincs inverze, ami a geometriai tartalomból is nyilvánvaló.

20) Határozzuk meg az $[x,y]$ síknak az origó körüli φ szögű elforgatásával adódó transzformáció mátrixát. Mutassuk meg, hogy a mátrix ortogonális! Írjuk fel az inverz transzformációt is!

Legyen az O origóból a sík egy P pontjába mutató helyvektor $\underline{r}(x,y)$, a P pont P' képébe mutató helyvektor pedig $\underline{r}'(x',y')$.

Ekkor az elforgatást ismét az $\underline{r}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{r}$ egyenlettel írhatjuk fel, amely kiírva a vektorkomponenseket a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



A transzformációs mátrix meghatározásához az ábrát hívjuk segítségül. Írjuk fel az $\underline{r}$ és $\underline{r}'$ vektorokat az $\{\underline{\mathrm{i}}, \underline{\mathrm{j}}\}$ természetes bázisvektorok segítségével!

$$\begin{aligned}
\underline{r} &= r\cos\alpha\underline{i} + r\sin\alpha\underline{j} = x\underline{i} + y\underline{j} \\
\underline{r}' &= r\cos(\alpha+\varphi)\underline{i} + r\sin(\alpha+\varphi)\underline{j} = \\
&= (r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi)\underline{i} + (r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi)\underline{j} = \\
&= (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\underline{i} + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\underline{j}
\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Az első oszlop önmagával vett skaláris szorzata:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

Az első és a második oszlop skaláris szorzata:

$$-\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

A transzformációs mátrix tehát ortogonális.

Az inverz transzformáció:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

21) Az előbbi feladat alapján írjuk fel az y-tengely körüli φ szögű elforgatás mátrixát térbeli koordinátarendszer esetén!

$$\underline{\underline{F_\varphi}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ez is ortogonális mátrix.

$$\det \underline{\underline{F_\varphi}} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

Tehát nem változtatja meg az elforgatott alakzat orientációját.

22) Írjuk fel az $[x, y]$ síkra ill. az x- és y-tengelyre vetítő mátrixokat!

$$\underline{\underline{V_{xy}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{V_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{V_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mindhárom mátrix szinguláris.

23) Határozzuk meg a $P(5, -4, -1)$ pont új koordinátáit az $\underline{a}_1(2{,}1{,}0)$; $\underline{a}_2(0{,}2{,}1)$; $\underline{a}_3(1{,}0{,}2)$ vektorok által meghatározott bázisban!

$$\alpha\underline{a}_1 + \beta\underline{a}_2 + \gamma\underline{a}_3 = 5\underline{i} - 4\underline{j} - 1\underline{k}$$
$$2\alpha\underline{i} + \alpha\underline{j} + 2\beta\underline{j} + \beta\underline{k} + \gamma\underline{i} + 2\gamma\underline{k} = \underline{i}(2\alpha + \gamma) + \underline{j}(\alpha + 2\beta) + \underline{k}(\beta + 2\gamma)$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$2\alpha + \gamma = 5$$
$$\alpha + 2\beta = -4$$
$$\beta + 2\gamma = -1$$

A második egyenletet 2-vel szorozva és kivonva az elsőből a következő egyenletet kapjuk:

$$-4\beta + \gamma = 13$$

Ehhez hozzáadva a harmadik egyenlet 4-szeresét γ-ra a következő egyenletre vezet:

$$9\gamma = 9$$

Innen $\gamma = 1$. A visszahelyettesítéseket elvégezve az egynletrendszer megoldása:

$$\alpha = 2, \qquad \beta = -3, \qquad \gamma = 1.$$

Tehát a P pont koordinátái az $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ bázisban $(2, -3{,}1)$.

24) Írjuk fel az $\left\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\right\}$ és $\{\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3\}$ ortonormált bázisok közti báziscsere mátrixát és végezzük el a mátrix vizsgálatát!

A $\{\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3\}$ bázisvektorok komponensei az $\left\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\right\}$ bázisban:

$$\underline{z}_1 \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}_2 \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \\ z_{32} \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}_3 \begin{bmatrix} z_{13} \\ z_{23} \\ z_{33} \end{bmatrix}.$$

Fejtsünk ki egy $\underline{r}$ vektort mindkét bázis szerint!

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} = \xi_1\underline{z}_1 + \xi_2\underline{z}_2 + \xi_3\underline{z}_3$$

Szorozzunk meg minden tagot skalárisan először az $\underline{i}$, majd a $\underline{j}$, végül a $\underline{k}$ vektorral. Így a következő három egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} x &= (\underline{z}_1\underline{i})\,\xi_1 + (\underline{z}_2\underline{i})\,\xi_2 + (\underline{z}_3\underline{i})\,\xi_3 = z_{11}\xi_1 + z_{12}\xi_2 + z_{13}\xi_3 \\ y &= \left(\underline{z}_1\underline{j}\right)\xi_1 + \left(\underline{z}_2\underline{j}\right)\xi_2 + \left(\underline{z}_3\underline{j}\right)\xi_3 = z_{21}\xi_1 + z_{22}\xi_2 + z_{23}\xi_3 \\ z &= (\underline{z}_1\underline{k})\,\xi_1 + (\underline{z}_2\underline{k})\,\xi_2 + (\underline{z}_3\underline{k})\,\xi_3 = z_{31}\xi_1 + z_{32}\xi_2 + z_{33}\xi_3 \end{aligned}$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix}}^{\underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

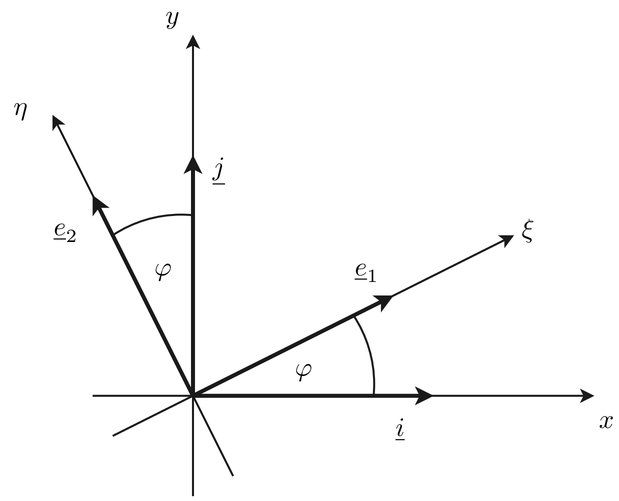
$\underline{\underline{A}}$ ortogonális mátrix, inverze $\underline{\underline{A}}^*$. Az inverz transzformáció:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} & z_{31} \\ z_{12} & z_{22} & z_{32} \\ z_{13} & z_{23} & z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

25) Írjuk fel a síkbeli koordinátarendszer φ szögű elforgatásával nyert új koordinátarendszer és az eredeti közti báziscsere mátrixát és annak inverzét!

Az új bázisvektorok komponensei a régi bázisban:

$$\underline{e}_1 \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad \underline{e}_2 \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}.$$



A báziscsere $\underline{\underline{A}}$ mátrixa:

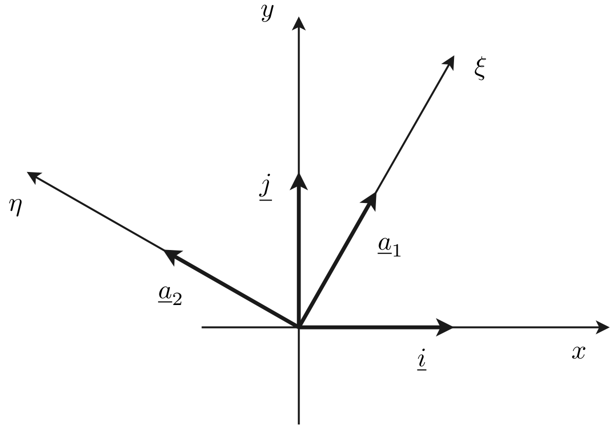
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}^{\underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

Az inverz transzformáció:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}^{\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{*}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

26) Adott a síkon egy $-3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy - 144 = 0$ egyenletű görbe. Határozzuk meg a görbe egyenletét abban a koordinátarendszerben, amelynek tengelyei az eredeti tengelyek 60°-os elforgatásával adódnak.

Az új bázisvektorok komponensei a régi bázisban:



$$\underline{a}_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \underline{a}_2 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

A báziscserét tehát a következő egyenletrendszerrel írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta \end{aligned}$$

Felhasználva az előbbi egyenleteket írjuk fel a görbe egyenletében szereplő x^2, y^2 és xy tagokat az új bázisban:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{3}{4}\eta^2 - \frac{2\sqrt{3}}{4}\xi\eta \\ y^2 &= \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{2\sqrt{3}}{4}\xi\eta \\ xy &= \left(\frac{1}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\xi^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\eta^2 + \underbrace{\xi\eta\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)}_{-\frac{1}{2}\xi\eta} \end{aligned}$$

A görbe egyenlete az eredeti bázisban:

$$-3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy - 144 = 0$$

Helyettesítsük be az imént kapott kifejezéseket!

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4}\xi^2 - \frac{9}{4}\eta^2 + \frac{6\sqrt{3}}{4}\xi\eta + \\
+\frac{69}{4}\xi^2 + \frac{23}{4}\eta^2 + \frac{46\sqrt{3}}{4}\xi\eta + \\
+\frac{78}{4}\xi^2 - \frac{78}{4}\eta^2 - \frac{52\sqrt{3}}{4}\xi\eta - 144 = 0 \\
\frac{144}{4}\xi^2 - \frac{64}{4}\eta^2 - 144 = 0 \\
144\xi^2 - 64\eta^2 - 576 = 0 \\
9\xi^2 - 4\eta^2 - 36 = 0 \\
\frac{\xi^2}{4} - \frac{\eta^2}{9} = 1
\end{aligned}$$

Utóbbi egy hiperbola egyenlete.

27) Határozza meg a következő négyzetes mátrixok inverzét – ha létezik! – és a mátrixokban lévő betűk olyan helyettesítését állítsa elő, amely mellett a megfelelő mátrixnak van inverze!

a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = -62, \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{62} & \frac{5}{62} \\ \frac{7}{62} & \frac{-3}{62} \end{bmatrix}$$

b)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = a^2 + b^2 \neq 0 \qquad (a \text{ és } b \text{ mindkettő egyszerre nem } 0)$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$$

c)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = 11, \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -11 & -2 & -7 \\ 14 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = 16, \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -11 & -2 & -7 \\ 14 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

e)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$, mert $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus.

$$\operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -9 & 17 & 6 \\ 17 & -26 & 7 \\ 6 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = 55, \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{55} \begin{bmatrix} -9 & 17 & 6 \\ 17 & -26 & 7 \\ 6 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

f)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 6 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{A}}$, mert $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus.

$$\operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 6-x^2 & x & -1 \\ x & \frac{6}{x}-1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = \frac{6}{x} - x - 1$$

Az invertálhatóság feltétele $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$. Tehát

$$\frac{6}{x} - x - 1 \neq 0$$

Innen nyilván $x \neq 0$. A többi feltételt $x \neq 0$-val való szorzás után a kapott másodfokú egyenlet megoldásával kapjuk.

$$6 - x^2 - x = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2}$$

Ahonnan

$$x \neq -3 \qquad \text{ill.} \qquad x \neq 2.$$

Ezen feltételek mellett az inverz:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\frac{6}{x} - x - 1} \begin{bmatrix} 6-x^2 & x & -1 \\ x & \frac{6}{x}-1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

28) Határozza meg az $\underline{\underline{X}}$ mátrixot a következő egyenletekből!

a)

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

A megoldáshoz rendezzük át az egyenletet!

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$$

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{B}}$$

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverzét kiszámítva megkaphatjuk a megoldást.

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = 1, \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -11 \\ 15 & 15 \end{bmatrix}$$

b)

$$\underline{\underline{X}} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Most kicsit másként:

$$\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$$

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$$

Ugyanúgy, mint az előbb, az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze kell.

$$\det \underline{\underline{A}} = -1, \qquad \underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 29 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \underline{\underline{X}} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Fejezzük ki $\underline{\underline{X}}$-et!

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$$

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}^{-1}$$

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det \underline{\underline{A}} = -1,$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A $\underline{\underline{B}}$ inverze:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det \underline{\underline{B}} = -17,$$

$$\underline{\underline{B}}^* = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{B}}^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A megoldás:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}} \, \underline{\underline{B}}^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Az első feladathoz hasonlóan,

$$\underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$$

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}$$

Számítsuk ki az $\underline{\underline{A}}$ inverzét!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \underline{\underline{A}} = -2 + 15 + 4 + 5 - 12 - 2 = 24 - 16 = 8,$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 9 & 13 & -14 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 9 & 13 & -14 \end{bmatrix}$$

A megoldás:

$$\underline{\underline{X}} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 9 & 13 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -8 & 4 & -2 \\ -12 & -2 & -7 \\ 60 & -26 & 41 \end{bmatrix}$$

e)

$$\underline{\underline{X}}\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Formálisan:

$$\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{B}}$$

$$\underline{\underline{X}}=\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$$

Most is az $\underline{\underline{A}}$ inverzét keressük.

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}\qquad \det\underline{\underline{A}}=-2-1-12+2+4+3=-15+9=-6,$$

$$\underline{\underline{A}}^{*}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}\qquad \operatorname{adj}\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}1 & -4 & -1\\ -3 & 0 & -3\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{A}}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 3\\ -5 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

A megoldás:

$$\underline{\underline{X}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 3\\ 5 & 2 & -4\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}9 & -6 & 3\\ -16 & 16 & -2\\ -1 & 10 & 7\end{bmatrix}$$

29) Határozza meg az alábbi mátrixok rangját azok elemi átalakításával!

a)

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \varrho(\underline{\underline{A}})=3.$$

b)

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 4 & 7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & 6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 2.$$

c)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -9 \\ -3 & -3 & -4 & 2 & 21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -5 & -3 & -11 \\ 0 & -3 & 10 & 8 & 24 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 10 & 8 & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 8 & 24 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 5.$$

d)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -9 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -15 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 4.$$

30) Határozza meg az alábbi mátrixok rangját!

a)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 \\ -4 & -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 \\ -4 & -3 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 3$$

b)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&2&1&2\\1&3&3&-1\\1&4&4&4\\1&1&5&3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&1\\0&2&1&-2\\0&-3&2&3\\0&0&3&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&3&-4\\0&3&5&0\\0&0&3&2\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&-4\\0&0&5&0\\0&0&3&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 4$$

31) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert Gauss módszerével!

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 11\\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 6\\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix}1&-1&2&2&|&5\\2&3&-1&1&|&11\\3&2&5&1&|&6\\4&-1&-2&-1&|&6\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5\\ 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 1\\ 5x_2 - x_3 - 5x_4 &= -9\\ 3x_2 - 10x_3 - 9x_4 &= -14 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix}1&-1&2&2&|&5\\0&5&-5&-3&|&1\\0&5&-1&-5&|&-9\\0&3&-10&-9&|&-14\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5\\ 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 1\\ 4x_3 - 2x_4 &= -10\\ -7x_3 - \frac{36}{5}x_4 &= -\frac{73}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5\\ 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 1\\ 4x_3 - 2x_4 &= -10\\ -\frac{107}{10}x_4 &= -\frac{321}{10} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -10 \\ 0 & 3 & -7 & -\frac{36}{5} & -\frac{73}{5} \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -10 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{107}{10} & -\frac{321}{10} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 5x_2 - 5x_3 &= 10 \\ 4x_3 &= -4 \\ x_4 &= 3 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 3 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho(\underline{\underline{B}}) = 4$$

32) Oldjuk meg ugyancsak Gauss módszerével a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & | & -32 \\ 2 & -1 & 3 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 12 \end{bmatrix}$$

$$\varrho(\underline{\underline{A}}) = 2 \quad \varrho(\underline{\underline{B}}) = 3$$

Csak a mátrixos alakkal dolgozva:

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & | & -32 \\ 2 & -1 & 3 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & | & -32 \\ 0 & 15 & -15 & | & 63 \\ 0 & 10 & -10 & | & 44 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & | & -32 \\ 0 & 15 & -15 & | & 63 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= -32 \\ 15x_2 - 15x_3 &= 63 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

A harmadik egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért az egyenletrendszer nem oldható meg.

33) A következő egyenletrendszert is Gauss-féle módszerrel oldjuk meg!

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & | & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & | & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & | & -8 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & | & -7 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & | & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho(\underline{\underline{B}}) = 2$$

A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

A négy ismeretlen kiszámításához csak két egyenlet áll rendelkezésünkre; két ismeretlent szabadon válaszhatunk pl. talán jó x_3 és x_4–et szabadon választani,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 + x_4 - 1 \\ x_1 &= 4(x_3 + x_4 - 1) - 2x_3 - 1 = 2x_3 + 4x_4 - 5 \end{aligned}$$

$x_4 = 1$ $x_3 = 2$ választása esetén $x_1 = 3$ $x_2 = 2$.

Nem törvényszerű e példában x_3 és x_4 választása.

34) Mutassuk meg, hogy a következő egyenletrendszer megoldható, és oldjuk meg a) a Gauss-módszerrel b) az inverz-mátrix módszerrel c) Cramer szabállyal.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

A megoldhatóság mátrixos vizsgálata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & | & -4 \\ 4 & 1 & 4 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 0 & 4 & | & -5 \\ 3 & 0 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & 4 & | & -5 \\ 3 & 0 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -4 \\ 3 & 0 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -4 \\ 3 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho(\underline{\underline{B}}) = 3$$

a) <u>Gauss-módszerrel:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & | & -4 \\ 4 & 1 & 4 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & -3 & -4 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \underline{\underline{-2}} \qquad -x_2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \underline{\underline{2}} \qquad x_1 + 2 - 4 = -1 \quad x_1 = \underline{\underline{1}}$$

b) Inverz mátrix módszerrel: $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{b}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det \underline{\underline{A}} = -4+8+4+8-8-2 = \underline{\underline{6}}$$

$$\underline{\underline{A}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(6+8-8) \\ \frac{1}{6}(16-4) \\ \frac{1}{6}(-6-12+6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

c) Cramer-szabállyal:

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \det \underline{\underline{A}}_1 = 4-4-8-4+16+2 = 6 \quad x_1 = \frac{\det \underline{\underline{A}}_1}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \det \underline{\underline{A}}_2 = -16-8-8+32+8+4 = 12 \quad x_2 = \frac{\det \underline{\underline{A}}_2}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\underline{\underline{A}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \det \underline{\underline{A}}_3 = 2-16-2-4+4+4 = -12 \quad x_3 = \frac{\det \underline{\underline{A}}_3}{\det \underline{\underline{A}}} = -\frac{12}{6} = -2$$

35) Vizsgáljuk meg a következő egyenletrendszereket a megoldhatóság szempontjából. Ha megoldható az egyenletrendszer, akkor írjuk is fel a megoldását.

a)

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4&=0\\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4&=0\\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4&=0\\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5\\ 3 & -1 & 2 & -7\\ 4 & 1 & -3 & 6\\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -10 & 3 & 8 & -13\\ 7 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 9 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -10 & 0 & 8 & -13\\ 7 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 9 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 46 & 0 & 8 & -21\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 46 & 0 & 0 & -21\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogén lineáris egyenletrendszerről van szó, és minthogy $\varrho(\underline{\underline{A}}) = 4$, ezért csak a triviális megoldása létezik.

b)

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&=1\\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4&=2\\ 5x_1+x_2-x_3+x_4&=-1\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4&=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&=1\\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4&=2\\ 5x_1+x_2-x_3+x_4&=-1\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4&=4 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2\\ 5 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{A}} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -5\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 3$$

$$\underline{\underline{B}} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 18 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 18 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 18 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 18 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 21{,}5 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{B}}) = 4$$

Minthogy $\varrho(\underline{\underline{A}}) \neq \varrho(\underline{\underline{B}})$, ezért az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -15 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$3 = \varrho(\underline{\underline{A}}) \neq \varrho(\underline{\underline{B}}) = 4$. Az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.

d)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & -14 & -2 \\ 1 & 14 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & 14 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 2 < n = 3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= -2x_3 \\ 2x_1 - x_2 &= -3x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 &= -11x_3 \\ x_1 &= -\frac{11}{7}x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x_2 &= -x_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{7}x_3 \end{aligned}$$

A megoldás: $x_1 = -\frac{11}{7}\,x_3$, $x_2 = -\frac{1}{7}x_3$, x_3 tetsz. Ez egy egyenest jelent a térben, amelynek paraméteres előállítása: $x = -\frac{11}{7}t$, $y = -\frac{1}{7}t$, $z = t$. Ez az origón áthaladó egyenes tartalmazza az összes megoldáshoz tartozó pontokat.

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a négy egyenletnek megfelelő, origón áthaladó síkok közös pontjai a fenti egyenesen sorakoznak. Rá lehet mutatni, hogy a síkok normálvektorai merőlegesek a $(-11, -1{,}7)$ vektorra, ami a metszésvonal egy irányvektora.

e)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer szerkezetéből látszik, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ és $x_4 = x_5 = u$ megoldásrendszer kielégíti az egyenletrendszert.

A megoldhatóság vizsgálata:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 4 < n = 5$$

x_5-öt tetszőlegesen választva..

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

Tehát az

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= x_5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -x_5 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= -5x_5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= x_5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható, mint inhomogén egyenletrendszer. Gauss módszerével megoldjuk.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= x_5 \\ 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= -3x_5 \\ 9x_2 - 6x_3 - 6x_4 &= -6x_5 \\ 5x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= -2x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15x_2 - 9x_3 - 9x_4 &= -9x_5 \\ 15x_2 - 10x_3 - 10x_4 &= -10x_5 \\ 15x_2 - 15x_3 - 6x_4 &= -6x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= x_5 \\ 15x_2 - 10x_3 - 10x_4 &= -10x_5 \\ x_3 + x_4 &= x_5 \\ -5x_3 + 4x_4 &= 4x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= x_5 \\ 15x_2 - 10x_3 - 10x_4 &= -10x_5 \\ x_3 + x_4 &= x_5 \\ 9x_4 &= 9x_5 \end{aligned}$$

Tehát a megoldás: $x_4 = x_5 = u$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, azaz $(0{,}0{,}0, u, u)$.

f)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1\\
x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0\\
3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2\\
4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & | & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & | & 0\\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & | & 2\\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & | & 0\\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2\\ 9 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2\\ 9 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = 3 = \varrho(\underline{\underline{B}}) < n = 5
$$

Két ismeretlen tetszőlegesen választható értéket vesz föl, pl. x_2 és x_3

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_4 + x_5 &= 1 - (x_2 - x_3) = 1 - u\\
x_1 + x_4 - x_5 &= x_2 - x_3 = u\\
3x_1 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 - 3(x_2 - x_3) = 2 - 3u\\
4x_1 - 5x_4 + 7x_5 &= 3 - 5(x_2 - x_3) = 3 - 5u
\end{aligned}
$$

Cramer-szabállyal oldjuk meg, uis.

$$
\det \underline{\underline{A}}' = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 8 + 3 - 3 - 3 + 4 - 6 = 3
$$

$$
\begin{vmatrix} 1-u & -1 & 1\\ u & 1 & -1\\ 2-3u & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4(1-u) + 2 - 3u - 3u - 2 + 3u + 4u + 3u - 3 = 1
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 1-u & 1\\ 1 & u & -1\\ 3 & 2-3u & 4 \end{vmatrix} = 8u - 3 + 3u + 2 - 3u - 3u - 4 + 4u - 6u + 4 = 3u - 1
$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1-u\\ 1 & 1 & u\\ 3 & -3 & 2-3u \end{vmatrix} = 4 - 6u - 3u + 3u - 3 + 3u - 3 + 2 - 3u + 6u = 0
$$

Tehát $x_1 = \frac{1}{3}\,x_2, x_3$ (tetsz.), $x_4 = x_2 - x_3 - \frac{1}{3}, x_5 = 0$. Ez az értékrendszer kielégíti az eredeti egyenletet.

g)

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 5 & | & -7 \\ 2 & 3 & -3 & | & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 5 & | & -7 \\ 0 & 0 & -4 & | & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 2 & 0 & 1 & | & 14 \\ 1 & 0 & 5 & | & -4 \\ 0 & 0 & -4 & | & 9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 2 & 0 & -9 & | & 14 \\ 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & -4 & | & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 22 \\ 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & -4 & | & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel $3 = \varrho(\underline{\underline{A}}) \neq \varrho(\underline{\underline{B}}) = 4$, ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása.

h)

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = -3$$
$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1$$
$$-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & | & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & | & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho(\underline{\underline{B}}) = 3$$

x_4 tetszőleges értékűnek válaszható:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 + 4x_4 \\ x_2 - x_3 &= -3 - x_4 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 + 3x_4 \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer, mint inhomogén egyenletrendszer megoldható $\det \underline{\underline{A}}' \neq 0$.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 1 + 3x_4 \qquad & x_1 + 3x_2 &= 1 + 3x_4 \\ x_2 - x_3 &= -3 - x_4 \qquad & x_2 - x_3 &= -3 - x_4 \\ 5x_2 + x_3 &= 3 + x_4 \qquad & -2x_3 &= -12 - 4x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 + 2x_4 \\ x_2 &= 3 + x_4 \\ x_1 &= -8 \end{aligned}$$

Tehát a megoldás: $x_1 = -8$; $x_2 = 3 + x_4$; $x_3 = 6 + 2x_4$; x_4 tetszőleges.
A megoldás kielégíti a teljes egyenletrendszert.

i)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 &= 19 \\ 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 &= 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 &= 33 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & -3 & | & 19 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 6 & | & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & -1 & | & 33 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 6 \\ 3 & -1 & -2 & 2 & -6 & | & 16 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 6 & | & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 2 & -6 & | & 28 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -6 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 6 & | & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -6 & | & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho(\underline{\underline{B}}) = 2$$

Tehát x_3, x_4, x_5 tetszőlegesen választható.

$$x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5 \qquad x_1 = 5 + x_3 - 3x_4 + 5x_5$$
$$x_2 = 2 - 2x_3 + 2x_4 - 6x_5$$

Megoldás: $x_1 = 5 + x_3 - 3x_4 + 5x_5;\ x_2 = 2 - 2x_3 + 2x_4 - 6x_5; x_3;\ x_4;\ x_5.$
A megoldás az eredeti egyenleteket kielégíti.

j)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 4 & -3 & 2 & 0 & 7 \\ 20 & -4 & 12 & -2 & 0 & -4 \\ 27 & 6 & -9 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 0 & -3 & 2 & 0 & 5 \\ -20 & 0 & 12 & -2 & 0 & -2 \\ 27 & 0 & -9 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 6 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho(\underline{\underline{B}}) = 3 < n = 5$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 - x_4 + x_5 = a \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 &= 2 + 3x_4 - 5x_5 = b \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 - 5x_4 + 7x_5 = c \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 7 - 12 - 2 + 4 - 63 = 17 - 77 = 60$$

megoldása:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ b & -1 & 7 \\ c & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2a + 7c - 6b - 2c + 2b - 21a = -19a - 4b + 5c$$

$$\begin{vmatrix} 3 & a & -2 \\ 2 & b & 7 \\ 1 & c & -2 \end{vmatrix} = -6b + 7a - 4c + 2b + 4a - 21c = 11a - 4b - 25c$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & -1 & b \\ 1 & 3 & c \end{vmatrix} = -3c + b + 6a + a - 2c - 9b = 7a - 8b - 5c$$

$$\begin{array}{ccc} 19 - 19x_4 + 19x_5 & -11 + 11x_4 - 18x_5 & -7 + 7x_4 - 7x_5 \\ 8 + 12x_4 - 20x_5 & 8 + 12x_4 - 20x_5 & 16 + 24x_4 - 40x_5 \\ -15 + 25x_4 - 35x_5 & 75 - 125x_4 + 175x_5 & 15 - 25x_4 + 35x_5 \\ \hline x_1 = \dfrac{12 + 18x_4 - 36x_5}{60} & x_2 = \dfrac{70 - 102x_4 + 144x_5}{60} & x_3 = \dfrac{24 + 6x_4 - 12x_5}{60} \end{array}$$

x_4; x_5 tetszőlegesen választható! A kapott megoldás kielégíti az eredeti egyenleteket.

36) Állapítsuk meg C értékét úgy, hogy az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= C \end{aligned} \tag{0.1}$$

egyenletrendszer megoldható legyen!

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -2 & | & 4 \\ -3 & -5 & 4 & 1 & | & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & | & 6+C \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 6+C \end{bmatrix}$$

Látható, hogy $\varrho(\underline{\underline{A}}) = 2$, $\varrho(\underline{\underline{B}}) = 2 \Leftrightarrow$, ha $C = -6$. Ekkor $n = 4$ miatt 2 ismeretlen szabadon válaszható. A Gauss módszerrel dolgozva

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{alapján} \quad x_1 = 2 + 3x_3 + 7x_4; \\ &x_2 = -x_3 - 4x_4; \quad x_3; \quad x_4 \quad \text{a megoldás.} \end{aligned}$$

37) Állapítsuk meg c értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszer megoldható legyen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= c \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -5 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 2c \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & c \\ 2 & -3 & 1 & | & -5 \\ 4 & -1 & -1 & | & 2c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & c \\ 0 & -5 & 3 & | & -5-2c \\ 0 & -5 & 3 & | & -2c \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & c \\ 0 & -5 & 3 & | & -5-2c \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Az utolsó formából adódó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= c \\ -5x_2 + 3x_3 &= -5 - 2c \\ 0 &= 5 \end{aligned}$$

Mivel az utolsó egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért nem adható meg olyan c érték, hogy az egyenletrendszer egyátalában megoldható lehessen.

38) Határozzuk meg az

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = a$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = b$$

egyenletrendszerből b-t, mint az a paraméter függvényét úgy, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen!

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & a \\ 2 & -2 & -1 & | & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & a \\ 0 & -4 & -3 & | & b \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & a \\ 0 & 0 & 1 & | & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & a \\ 0 & 0 & 0 & | & b+a \end{bmatrix} \sim$$

Látható, hogy $\varrho(\underline{\underline{A}}) = 3$, tehát $\varrho(\underline{\underline{B}}) = 3$ csak úgy lehet, ha $b = -a$, ekkor ugyanis $b + a = 0$, ami szükséges $\varrho(\underline{\underline{B}}) = 3$-hoz.

39) Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy a

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + ax_2 + 2x_3 = 2$$
$$x_1 + 9x_2 - 5x_3 = b$$

egyenletrendszernek

a) egyértelmű megoldása legyen.

b) végtelen sok megoldása legyen.

c) ne legyen megoldása.

Átrendezzük az egyenletrendszert:

$$x_1 - 5x_3 + 9x_2 = b$$
$$3x_1 - x_3 + 5x_2 = 1x_1 + 2x_3 + ax_2 \quad = 2$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 & | & b \\ 3 & -1 & 5 & | & 1 \\ 1 & 2 & a & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 & | & b \\ 0 & 14 & -22 & | & 1-3b \\ 0 & 7 & a-9 & | & 2-b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 & | & b \\ 0 & 14 & -22 & | & 1-3b \\ 0 & 0 & a+2 & | & \frac{3+b}{2} \end{bmatrix}$$

a) $\varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho(\underline{\underline{B}}) = 3$ esetén, ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $\det \underline{\underline{A}} = 14(a+2) \neq 0$, tehát $a \neq -2$ esetén az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

b) $\varrho(\underline{\underline{A}}) = \varrho(\underline{\underline{B}}) < n = 3$ esetén van végtelen sok megoldása. Ha $a = -2$, akkor $\varrho(\underline{\underline{A}}) = 2$, de $\varrho(\underline{\underline{B}}) = 2$ akkor teljesül, ha $a = -2$ mellett még $\frac{3+b}{2} = 0$ is, azaz $b = -3$ fennáll.

c) $\varrho(\underline{\underline{A}}) \neq \varrho(\underline{\underline{B}})$ esetén nincs megoldás.

$$\left.\begin{array}{ll} \varrho(\underline{\underline{A}}) = 2\,, \text{ ha} & a = -2 \\ \varrho(\underline{\underline{B}}) = 3\,, \text{ ha} & b \neq -3 \end{array}\right\}$$ tehát ez a feltétele, hogy ne legyen megoldása az egyenletrendszernek.

<u>Emlékeztető</u>:

sajátértékegyenlet: $\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{s} = \lambda \underline{s}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\underline{s} - \lambda\underline{s} = 0,$ azaz $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})\underline{s} = 0,$ ahol λ : sajátérték, s : sajátirány.

Ez egy homogén lineáris egy. r. $\Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = 0$ esetén van nem trivi. megoldás.
$\Rightarrow \infty$ sok megoldás van!

karakterisztikus egy.: $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

40) Határozzuk meg a következő sajátértékeit és sajátvektorait!

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \qquad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1$$

Sajátvektorok:

$\lambda_1 = 4$-hez

$$\begin{array}{r} -2s_1 + 2s_2 = 0 \\ 3s_1 - 3s_2 = 0 \end{array} \qquad \frac{s_1}{s_2} = 1 \qquad \begin{array}{r} \underline{s} = (1{,}1) \\ \text{ill. } \underline{s} = (s, s) \end{array} \qquad \underline{s}^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\lambda = -1$-hez

$$3t_1 + 2t_2 = 0 \qquad \frac{t_1}{t_2} = -\frac{2}{3} \qquad \underline{t} = (-2{,}3) \qquad \underline{t}^\circ = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$$
$$3t_1 + 2t_2 = 0 \qquad \text{ill. } \underline{t} = (-2t{,}3t)$$

b)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 6 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \qquad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

Sajátvektorok:

$\lambda_1 = 2$-höz

$$s_1 - s_2 = 0 \qquad \frac{s_1}{s_2} = 1 \qquad \underline{s} = (1{,}1) \qquad \underline{s}^\circ = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$4s_1 - 4s_2 = 0 \qquad \text{ill. } \underline{s} = (s, s)$$

$\lambda = -1$-hez

$$4t_1 - t_2 = 0 \qquad \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{4} \qquad \underline{t} = (1{,}4) \qquad \underline{t}^\circ = (\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}})$$
$$4t_1 - t_2 = 0 \qquad \text{ill. } \underline{t} = (t{,}4t)$$

c)

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 & -12 \\ 1 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2+\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + 8(1-\lambda) = 0$$
$$(1-\lambda) - [8 - (2+\lambda)(4-\lambda)] = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{array}{ll} \lambda^2 - 2\lambda = 0 & \lambda_2 = 0 \\ \lambda(\lambda - 2) = 0 & \lambda_3 = 2 \end{array}$$

Sajátvektorok:

$\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor:

$$3s_1 - 8s_2 - 13s_3 = 0 \qquad 3s_1 + 9s_2 + 12s_3 = 0 \qquad \underline{s} = (-4s, 0, s)$$

$$s_1 + 3s_2 + 4s_3 = 0 \;/\cdot 3 \nearrow \qquad s_2 = 0 \qquad s_1 = -4s_3 \qquad \underline{s}^\circ = (\frac{4}{\sqrt{17}}, 0, \frac{1}{\sqrt{17}})$$

$$s_3 = s_3$$

$\lambda_2 = 0$-hoz tartozó sajátvektor:

$$-2t_1 - 8t_2 - 12t_3 = 0 \qquad \underline{t} = (-4t, t, 0)$$

$$t_1 + 4t_2 + 4t_3 = 0 \qquad \underline{t}^\circ = (\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, 0)$$

$$t_3 = 0 \quad t_1 = -4t_2$$

$\lambda_3 = 2$-höz tartozó sajátvektor:

$$-4u_1 - 8u_2 - 12u_3 = 0 \qquad \underline{u} = (-2u, u, 0)$$

$$u_1 + 2u_2 + 4u_3 = 0 \qquad \underline{u}^\circ = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$$

$$u_3 = 0 \quad u_1 = -2u_2$$

d)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)^2 - 2(2-\lambda) = 0$$

$$[(3-\lambda)(2-\lambda) - 2](2-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \quad \begin{cases} \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 0$-höz tartozó sajátvektor:

$$s_1 + s_2 - s_3 = 0 \qquad s_1 = 0 \qquad \underline{s} = (0, s, s) \qquad \underline{s}^\circ = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$s_1 = 0 \qquad s_2 = s_3$$

$$-s_1 = 0$$

$\lambda_2 = 4$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{aligned} -t_1 + t_2 - t_3 &= 0 \qquad & t_1 &= 2t_2 = -2t_3 \qquad & \underline{t} &= (-2t, -t, t) \\ t_1 - 2t_2 &= 0 & t_2 &= -t_3 & \underline{t}^\circ &= (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) \\ -t_1 - 2t_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda_3 = 1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{aligned} 2u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \qquad & u_1 &= -u_2 \qquad & \underline{u} &= (-u, u, -u) \\ u_1 + u_2 &= 0 & u_1 &= u_3 & \underline{u}^\circ &= (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ -u_1 + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\underline{s}^\circ, \underline{t}^\circ, \underline{u}^\circ$ ortonormált bázist képez, hiszen a kiindulási mátrix szimetrikus.

41) Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátvektorait!

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda) - 2] - [2(2-\lambda) \cdot 2] + [2 - (3-\lambda)]$

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0 \qquad \lambda = 1 \qquad \text{megoldás.}$$

$-\lambda^3 + 7\lambda_2 - 11\lambda + 5 : (-\lambda + 1) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$
$-\lambda^3 \underline{+\lambda_2}$
$6\lambda^2 - 11\lambda$
$6\lambda^2 \underline{-6\lambda}$
$-5\lambda + 5$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

Sajátértékek: $\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$\lambda_1 = 5$-höz tartozó sajátvektor

$$\begin{aligned} -3s_1+2s_2+s_3&=0\\ s_1-2s_2+s_3&=0\\ s_1+2s_2-3s_3&=0 \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & -8 & 0\\ 0 & -4 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} -4s_2+4s_3&=0\\ s_1+2s_2-3s_3&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &s_2=s_3\\ &s_1-s_2=0 \quad \Rightarrow s_1=s_2 \end{aligned}$$

$\varrho(\underline{\underline{B}})=2<n=3$, létezik $\Rightarrow$ $\underline{s}=(s,s,s)$, ill. (1,1,1)

a triviálistól különböző megoldás: $\underline{s}^\circ=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

$\lambda_2=\lambda_3=1$-hez tartozó sajátvektorok:

$$\begin{aligned} t_1+2t_2+t_3&=0 \quad &&\text{Mert két ismeretlen}\\ t_1+2t_2+t_3&=0 \quad &&\text{válaszható szabadon.}\\ t_1+2t_2+t_3&=0 \quad &&\text{Ez azt jelenti, hogy} \end{aligned}$$

két lineárisan független sajátvektor is található ilyen.

$$\begin{array}{llll} \underline{t}=(2t,-t,0) & \text{és} \quad \underline{u}=(u,0,-u) & \text{továbbá minden}\\ (2,-1,0) & \qquad (1,0,-1) & \alpha\underline{t}+\beta\underline{u}=(2\alpha+\beta,-\alpha,-\beta) \end{array}$$

alakú vektor sajátvektor (α és β tetsz.)

A kapott $\underline{s}$, $\underline{t}$, $\underline{u}$ sajátvektorok lineárisan függetlenek, ugyanis

$$\underline{\underline{S}}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \varrho(\underline{\underline{S}})=3,$$

ugyanis det $\varrho(\underline{\underline{S}})=4\neq 0$.

42) Oldjuk meg a következő mátrixegyenletet:

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{X}}=\begin{bmatrix} 8 & 18\\ 1 & 5\\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Röviden: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}=\underline{\underline{B}}$

$\underline{\underline{X}}$: 3×2-es tipusú kell legyen.

$\det \underline{\underline{A}} = -6+8+4+32-1-6 = 31 \neq 0.$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{X}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3x_1+x_2+4x_3 & 3y_1+y_2+4y_3 \\ x_1-2x_2+2x_3 & y_1-2y_2+2y_3 \\ 4x_1+x_2+x_3 & 4y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}}$$

A megoldandó egyenletrendszerek:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & | & 8 & | & 18 \\ 1 & -2 & 2 & | & 1 & | & 5 \\ 4 & 1 & 1 & | & 6 & | & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & | & 5 \\ 3 & 1 & 4 & | & 3 & | & 18 \\ 4 & 1 & 1 & | & 6 & | & 15 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & | & 5 \\ 0 & 7 & -2 & | & 5 & | & 3 \\ 0 & 9 & -7 & | & 2 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & | & 5 \\ 0 & 63 & -18 & | & 45 & | & 27 \\ 0 & 63 & -49 & | & 14 & | & -35 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & | & 5 \\ 0 & 63 & -18 & | & 45 & | & 27 \\ 0 & 0 & -31 & | & -31 & | & -62 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 & y_1 = 3 \\ x_2 = 1 & y_2 = 1 \\ x_3 = 1 & y_3 = 2 \end{matrix}$$

Tehát

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszerek megoldhatóságának feltétele $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$.

b)

$$\underline{\underline{X}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ -4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Röviden: $\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$

$\underline{\underline{X}}$: 2×3-as tipusú kell legyen.

$\det \underline{\underline{A}} = 6+4+6+2-36+2 = -16 \neq 0.$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{X}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1+4x_2-2x_3 & 3x_1+x_2+x_3 & x_1-x_2+3x_3 \\ 2y_1+4y_2-2y_3 & 3y_1+y_2+y_3 & y_1-y_2+3y_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}}$$

A megoldandó egyenletrendszerek:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & -4 & | & -4 \\ 3 & 1 & 1 & | & 2 & | & 6 \\ 1 & -1 & 3 & | & 6 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 6 & -8 & | & -16 & | & -16 \\ 0 & 4 & -8 & | & -16 & | & -12 \\ 1 & -1 & 3 & | & 6 & | & 6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & | & 8 & | & 2 \\ 0 & 4 & -8 & | & -16 & | & -12 \\ 1 & -1 & 3 & | & 6 & | & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_3 = 2 & y_3 = 0.5 \\ x_2 = 0 & y_2 = -2 \\ x_1 = 0 & y_1 = 2.5 \end{matrix}$$

Tehát

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & -2 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszerek megoldhatóságának feltétele $\det \underline{\underline{A}}^* = \det \underline{\underline{A}} \neq 0$.

A lineáris tér

<u>Definíció</u>: Legyenek $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in \mathbb{R}$ és $\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}, \ldots \in \mathfrak{L}$ halmaz. Az $\mathfrak{L}$ halmazt lineáris térnek (vektortérnek) nevezzük, ha

1) bármely két $\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}} \in \mathfrak{L}$ eleméhez egyértelműen hozzá van rendelve a halmaz egy eleme: $\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{y}} \in \mathfrak{L}$ (összege $\underline{\underline{x}}$-nek és $\underline{\underline{y}}$-nak)

   Az összeadás tulajdonságai:

   a) $\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{y}} + \underline{\underline{x}}$ kommutatív

   b) $\underline{\underline{x}} + (\underline{\underline{y}} + \underline{\underline{z}}) = (\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{y}}) + \underline{\underline{z}}$ asszociatív

   c) létezik olyan zéruselem: $\underline{\underline{0}} \in \mathfrak{L}$, amelyre
   $\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{x}}$ minden $\underline{\underline{x}} \in \mathfrak{L} - re$.

   d) létezik minden $\underline{\underline{x}} \in \mathfrak{L}$-hez inverzelem $\underline{\underline{x}} \in \mathfrak{L}$ úgy, hogy $\underline{\underline{x}} + (-\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{0}}$.

2) bármely $\underline{\underline{x}} \in \mathfrak{L}$ elemhez és bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ számhoz egyértelműen hozzá van rendelve az $\mathfrak{L}$ halmaz egy eleme, amelyet α szám és $\underline{\underline{x}}$ elem szorzatának nevezünk; jelölése: $\alpha\underline{\underline{x}}$

   A számmal való szorzás tulajdonságai:

   a) $\mathbb{R}$ egységelemével szorozva
   $1 \cdot \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}$.

b) több számmal való szorzás művelete asszociatív:

$\alpha(\beta\underline{\underline{x}}) = (\alpha\beta)\underline{\underline{x}}$

3) Az előbbi műveletekre kétféle disztributívitás áll fenn:

a) $(\alpha + \beta)\underline{\underline{x}} = \alpha\underline{\underline{x}} + \beta\underline{\underline{x}}$

b) $\alpha(\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{y}}) = \alpha\underline{\underline{x}} + \alpha\underline{\underline{y}}$

Mutassuk meg, hogy a következő halmazok a szokásos műveletekkel lineáris teret alkotnak!

1) 2×2-es mátrixok.

2) $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények.

3) legfeljebb n-edfokú polinomok.

Vigyázat! a pontosan n-edfokú polinomok nem alkotnak lineáris teret, mert pl. két pontosan n-edfokú polinom összege lehet n-nél kisebb fokszámú.