Numerikus sorok

1) Konvergens-e a következő numerikus sor?

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Megoldás: A sor Leibnitz típusú, azaz váltakozó előjelű, valamint a tagokból álló sorozat abszolútértékben monoton csökkenő és 0-hoz tart: $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Tehát a numerikus sor konvergens.

2) Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$$

sor divergens!

Megoldás: Ha a sor konvergens lenne, akkor létezne a $\lim_{n\to\infty} S_n = = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0$ határérték. Azonban

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

tehát $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \frac{1}{2}$. Konvergencia esetén ez a határérték 0 lenne, tehát a numerikus sor nem lehet konvergens.

3) Konvergens-e a következő numerikus sor?

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

Megoldás: A konvergencia szükséges feltétele, hogy a tagokból álló sorozatra: $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ legyen. Ebben az esetben: $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} = = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, azaz nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, tehát a sor nem lehet konergens.

4) Konvergens-e a következő numerikus sor?

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Megoldás: Mivel

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1},$$

így a majoráns-elvet használva:

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=$$

$$1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\to 1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

Tehát a numerikus sor konvergens.

5) Konvergens-e a következő numerikus sor?

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

Megoldás: A D'Alambert-féle hányadostesztet használjuk, azaz vizsgáljuk a $\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ torlódási pontot. Ha ez kisebb 1-nél, akkor a sor konvergens:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}<1,$$

tehát a sor konvergens.

6) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$ numerikus sor?

Megoldás: A majoráns-elvet alkalmazzuk:

$$\frac{1}{1+2^n}<\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

így a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$ numerikus sort a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ numerikus sor majorálja, ami konvergens, hiszen 1-nél kisebb hányadosú geometriai sor. Tehát az eredeti sor is kovergens.

7) Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ sor konvergens!

Megoldás: A Cauchy-féle gyöktesztet használjuk:

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\frac{1}{\ln n}\to 0<1\quad(n\to\infty)$$

Tehát a sor konvergens.

8) Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ sor konvergens!

Megoldás: A D'Alambert-féle hányadostesztet használjuk:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{\dfrac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1 \quad (n \to \infty)$$

Tehát a sor konvergens.

9) Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+5}$ sor divergens!

Megoldás: A sor minorálható egy másik divergens sorral:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+3)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}.$$

Ez utóbbi $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4}$-től induló harmonikus sor, amiről tudjuk, hogy divergens. Mivel divergens sorral minoráltuk, az eredeti sor is divergens.

10) Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ sor divergens!

Megoldás: A sort minoráljuk:

$$\ln n < n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

az utóbbi sor a harmonikus sor, tehát divergens, ami azt jelenti, hogy az általa minorált eredeti sor is divergens.

11) Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ sor divergens!

Megoldás:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n,$$

így

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln (n+1) - \ln n) =$$
$$(\ln (n+1) - \ln 1) = \ln (n+1) \to \infty.$$

Tehát a részletösszegek sorozata nem konvergens, így a sor divergens.

12) Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor divergens!

Megoldás:
Első próbálkozás: D'Alambert-féle hányadosteszttel:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \to 1 \not< 1$$

tehát ezzel a teszttel nem lehet eldönteni a konvergenciát.

Második próbálkozás: Minorálással:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$$

ami harmonikus sort ad, tehár divergens sorrl minoráltunk, azaz az eredeti sor is divergens.

13) Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ sor divergens!

Megoldás: Ellenőrizzük a konvergencia szükséges feltételének teljesülését: $|a_n| \to 0$. Ha ez nem teljesül, a sor nem lehet konvergens. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{100^n} \stackrel{?}{=} 0$. Vizsgáljuk a sorozat reciprokát:

$$\frac{100^n}{n!} = \frac{100^{100}}{100!} \cdot \underbrace{\frac{100}{101} \cdot \frac{100}{102} \cdot \ldots}_{<1} \cdot \frac{100}{n} < \frac{100^{100}}{100!} \cdot \frac{100}{n} = \frac{100^{101}}{100!\, n} = \frac{\frac{100^{101}}{100!}}{n} \to 0$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{100^n} \neq 0$, azaz nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így a sor divergens.

14) Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ sor konvergens!

Megoldás: Az előző feladat kapcsán láttuk, hogy ennél a sornál a konvergencia szükséges feltétele teljesül, tehát a sor konvergens lehet. A D'Alambert-féle hányadostesztet használhatjuk:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{100^n}{n!}} = \frac{n!\,100^{n+1}}{(n+1)!\,100^n} = \frac{100}{n+1} \to 0 < 1$$

Tehát a sor konvergens.

15) Konvergens-e a következő számsor?

$$p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} + \cdots + \frac{p^n}{n} + \ldots, \quad \text{ahol} \quad |p| < 1$$

Megoldás: Kettébontjuk a $|p| < 1$ feltételt:

a) $-1 < p < 0$ esetén:

$$p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} + \cdots + \frac{p^n}{n} + \ldots$$

váltakozó előjelű sor és $|a_n| = \left|\frac{p^n}{n}\right| < \frac{1}{n} \to 0$, tehát Leibnitz típusú sorról van szó, ami mindig konvergens.

b) $0 < p < 1$ esetén használjuk a D'Alambert-féle hányadostesztet:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{p^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{p^n}{n}} = \frac{np^{n+1}}{(n+1)p^n} = p\frac{n}{n+1} \to p < 1$$

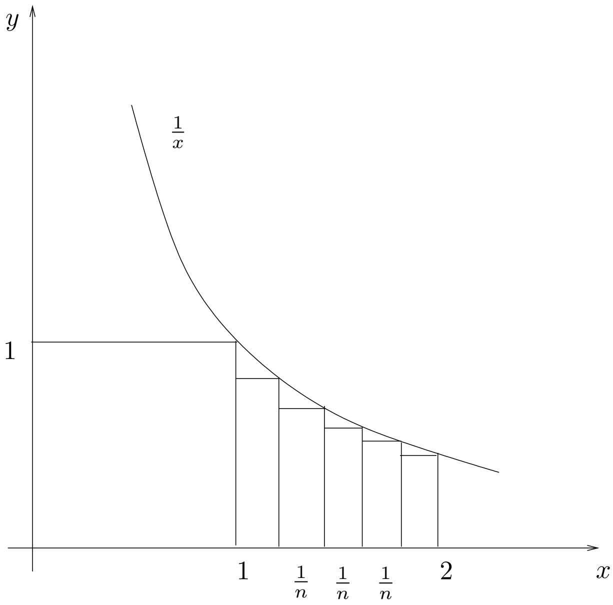
tehát a sor ebben az esetben is konvergens.

16) Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ számsor összegét!

Megoldás: Vegyük észre, hogy a sor Leibnitz típusú. Emiatt a sor konvergens. Tekintsük az $2n$. részletösszeget:

$$\begin{aligned}
S_{2n} =& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\
& \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \\
& \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \\
& \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Most tekintsük az $\dfrac{1}{x}$ függvényt az n részre osztott [1,2] intervallum fölött, és vegyük az $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ alsó integrálközelítő összegét!



A k. kis oszlop területe:

$$T_k = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{\frac{n+k}{n}} = \frac{1}{n}\frac{n}{n+k} = \frac{1}{n+k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Tehát az alsó integrálközelítő összeg: $T = \sum_{k=1}^{n} T_k$. Ezt összevetve az előző eredménnyel: $S_{2n} = T$, ami azt jelenti, hogy S_{2n} alulról tart az integrál értékéhez:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

17) Számítsuk ki a következő számsorok összegét!

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} =?$$

Megoldás:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^k}{6^k} + \frac{3^k}{6^k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{6^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{6^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{6} \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{6} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{2}.$$

b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} =?$$

Megoldás: Parciális törtek összegére bontjuk az általános tagot:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} = \frac{A(k-1) + Bk}{k(k-1)}$$

$$1 = A(k-1) + Bk = (A+B)k - A$$

$$A + B = 0$$

$$A = -1 \quad \Longrightarrow \quad B = 1.$$

Tehát

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

A sort így teleszkópikus sorrá alakítottuk, azaz a tagok többsége kiesik:

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n} \to 1.$$

Tehát a sor összege 1.

Feladatok

1. Vizsgálja a következő sorok konvergenciáját majoráns- vagy minoránskritérium segítségével:

$a).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2};$ $b).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1};$ $c).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-16}{n^5+n};$

$d).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n^2-n};$ $e).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^{2n}}{n^n+1};$ $f).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n};$

$g).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^2};$ $h).\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n};$ $i).\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^5+1}};$

$j).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^7}};$ $k).\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n};$ $l).\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

$m).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+7n^2+12n}$ $n).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n;$ $o).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$

$p).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}};$ $q).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n^2+1};$ $r).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}.$

2. Vizsgálja a következő sorok konvergenciáját a hányados- vagy gyökkritérium segítségével:

$a).\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n};$ $b).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n};$ $c).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n;$

$d).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n;$ $e).\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n;$ $f).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$

$g).\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1};$ $h).\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)};$ $i).\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg} n\right)^n;$

$j).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

3. Vizsgálja, hogy az alábbi sorok közül melyek abszlút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek:

$a).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}};$ $b).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n};$ $c).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{4^n};$

$d).\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)};$ $e).\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\frac{\pi}{n};$ $f).\ \sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$g).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1};$ $h).\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}$ $i).\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}.$