Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, I. zárthelyi dolgozat, 2008/09. II. félév, Minta-megoldás

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.

1. FELADAT. Adjuk meg annak a testnek a térfogatát, melyet az $x^2 + y^2 = 25$ henger belsejében a $z = 0$ és $x + z = 8$ síkok határolnak! | Térfogat: 200π (6p) |

Az origó körüli 5 sugarú körlap felett a $z = 0$ és $z = 8 - x$ felületek közti tartomány térfogatát kell meghatározni. Síkbeli polárkoordinátákra áttérve

$$\int_0^5 \int_0^{2\pi} (8 - r\cos\phi) r \,\mathrm{d}\phi \mathrm{d}r = \int_0^5 [8r\phi - r^2 \sin\phi]_0^{2\pi} \,\mathrm{d}r = \int_0^5 16r\pi \,\mathrm{d}r = \left[16\frac{r^2}{2}\pi\right]_0^5 = 200\pi.$$

2. FELADAT. Adjuk meg az $\bar{\mathbf{r}}(t) = (t, \sqrt{4t - t^2}, 2\ln(1 - t/4))$ görbe ívhosszát a $t_0 = 0$ és $t_1 = 1$ paraméterű pontok között! | Ívhossz: $4\mathrm{arth}(1/2)$ v. $2\ln 3$ (6p) |

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) = \left(1, 1/2\,\frac{4 - 2\,t}{\sqrt{4\,t - t^2}}, \frac{-1}{2\,(1 - 1/4\,t)}\right),$$

amiből

$$|\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t)| = \sqrt{16\,\frac{1}{t\,(t-4)^2}}.$$

Tehát

$$s = \int_0^1 \sqrt{16\,\frac{1}{t\,(t-4)^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 4\,\frac{1}{\sqrt{t}\,(4-t)}\,\mathrm{d}t \overbrace{=}^{t=u^2} \int_0^1 4\,\frac{1}{u\,(4-u^2)} 2u\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{(1-(u/2)^2)}\,\mathrm{d}u = 4[\mathrm{arth}(u/2)]_0^1 = 4\mathrm{arth}(1/2) = 2\ln 3.$$

3. FELADAT. Adjuk meg az $\bar{\mathbf{r}}(t) = (t, t^2, t^3)$ görbe $t = 1$ pontjához tartozó főnormális egységvektort és a rektifikálósík egyenletét!

| Főnormális: $(-11/\sqrt{266}, -8/\sqrt{266}, 9/\sqrt{266})$ (5p) | Síkegyenlet: $-11x - 8y + 9z + 10 = 0$ (1p) |

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}}(1) = (1, 2, 3),\ \ddot{\bar{\mathbf{r}}}(1) = (0, 2, 6),\ \dot{\bar{\mathbf{r}}}(1) \times \ddot{\bar{\mathbf{r}}}(1) = (6, -6, 2)$$

Így egy $\bar{\mathbf{N}}$ irányú vektor

$$(\dot{\bar{\mathbf{r}}}(1) \times \ddot{\bar{\mathbf{r}}}(1)) \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}(1) = (-22, -16, 18),$$

azaz $\bar{\mathbf{N}} = (-11/\sqrt{266}, -8/\sqrt{266}, 9/\sqrt{266})$.

Mivel $\bar{\mathbf{r}}(1) = (1, 1, 1)$, így a rektifikálósík egyenlete $-22(x-1) - 16(y-1) + 18(z-1) = 0$, azaz $-11x - 8y + 9z + 10 = 0$.

4. FELADAT. Határozzuk meg az $\bar{\mathbf{r}}(t) = (t^2, \cos t^2, \sin t^2)$ görbe görbületét és torzióját a t paraméter függvényében! | Görbület: $1/2$ (6p) | Torzió: $1/2$ (6p) |

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, -2\sin(t^2)t, 2\cos(t^2)t)$$
$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (2, -4\cos(t^2)t^2 - 2\sin(t^2), -4\sin(t^2)t^2 + 2\cos(t^2))$$
$$\dddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 8t^3\sin(t^2) - 12\cos(t^2)t, -8t^3\cos(t^2) - 12\sin(t^2)t)$$
$$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = (8t^3, 8t^3\sin(t^2), -8t^3\cos(t^2))$$
$$|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)| = 8\sqrt{2}|t|^3$$
$$\dot{\mathbf{r}}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t)\dddot{\mathbf{r}}(t) = 64t^6$$
$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 2\sqrt{2}|t|.$$

Tehát a görbület: $\kappa = 8\sqrt{2}|t|^3/(2\sqrt{2}|t|)^3 = 1/2$ és a torzió $64t^6/(8\sqrt{2}|t|^3)^2 = 1/2$.

5. Feladat. Határozzuk meg az $\overline{\mathbf{r}}(u, v) = (u\mathrm{ch}\, v, u\mathrm{sh}\, v, u)$ felület felszínét, ha $0 \leq u, v \leq 1$! Határozzuk meg az érintősík egyenletét az $(u, v) = (1/2, 1/2)$ paramétereknek megfelelő felületpontban!

Felszín: $\sqrt{2}(e^2 - 1)e^{-1}/4$	(5p)

Érintősík: $-\mathrm{ch}\,(1/2)(x - (1/2)\mathrm{ch}\,(1/2)) + \mathrm{sh}\,(1/2)(y - (1/2)\mathrm{sh}\,(1/2)) + (z - 1/2) = 0$	(1p)

$$\overline{\mathbf{r}}'_u = (\mathrm{ch}\, v, \mathrm{sh}\, v, 1)$$
$$\overline{\mathbf{r}}'_v = (u\mathrm{sh}\, v, u\mathrm{ch}\, v, 0)$$
$$\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v = (-u\mathrm{ch}\, v, u\mathrm{sh}\, v, u)$$
$$|\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v| = \sqrt{2}u\mathrm{ch}\, v$$
$$A = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{2}u\mathrm{ch}\, v \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = ... = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^2 - 1)e^{-1}$$

Az érintősíkhoz:

$$\overline{\mathbf{r}}(1/2, 1/2) = ((1/2)\mathrm{ch}\,(1/2), (1/2)\mathrm{sh}\,(1/2), 1/2)$$

és

$$(\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v)(1/2, 1/2) = (-(1/2)\mathrm{ch}\,(1/2), (1/2)\mathrm{sh}\,(1/2), 1/2),$$

azaz egy normálvektor pl.

$$(-\mathrm{ch}\,(1/2), \mathrm{sh}\,(1/2), 1),$$

és így a síkegyenlet:

$$-\mathrm{ch}\,(1/2)(x - (1/2)\mathrm{ch}\,(1/2)) + \mathrm{sh}\,(1/2)(y - (1/2)\mathrm{sh}\,(1/2)) + (z - 1/2) = 0.$$

6. Feladat. Számítsuk ki $\mathrm{div}\overline{\mathbf{v}}(x, y, z)$ és $\mathrm{rot}\overline{\mathbf{v}}(x, y, z)$ értékét az $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (\cos(2x), \sin(2y), \mathrm{tg}z)$ vektorfüggvény esetén!

$\mathrm{div}\overline{\mathbf{v}}(x, y, z)$: $-2\sin(2x) + 2\cos(2y) + 1/\cos^2 z$	(3p)

$\mathrm{rot}\overline{\mathbf{v}}(x, y, z)$: $(0, 0, 0)$	(3p)

A divergencia és rotáció definíciójából egyszerűen adódnak a fenti értékek.

7. Feladat. Határozzuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (y, 0, zy)$ vektorfüggvény vonalintegrálját az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$, $t \in [0, 2\pi]$ csavarvonal mentén!

Vonalintegrál: -19π	(6p)

$$\dot{\overline{\mathbf{r}}}(t) = (-\sin t, \cos t, 3)$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin t, 0, 3t\sin t)(-\sin t, \cos t, 3)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (-(\sin t)\,(\sin t - 9\,t))\,\mathrm{d}t = ... = -19\pi$$

8. Feladat. Adjuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (2, 2y+z, y+1)$ vektorfüggvény egy potenciálfüggvényét (amennyiben létezik)! $\boxed{\text{Potenciálfv.: } 2x + y^2 + yz + z \qquad (6\text{p})}$

9. Feladat. Használjuk a Stokes-tételt a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (2z, 3x, 5y)$ vektorfüggvény rotációjának $\overline{\mathbf{r}}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 4-u^2)$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$ felületre vett integráljának kiszámítására ha a felület az $\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v$ vektorral van irányítva!

$\boxed{\text{Felületi int.: } 12\pi \qquad (6\text{p})}$

A vektorfüggvényt egy origó közepű 2 sugarú körön kell integrálni az óramutató járásával ellentétes irányban.

$$\int_0^{2\pi} (0, 3\cdot 2\cos t, 5\cdot 2\sin t)(-2\sin t, 2\cos t, 0)\,\mathrm{d}t = 12\pi$$

Másik megoldás az, hogy a megadott felület helyett az adott körlapra integráljuk a rotációfüggvényt (adott határgörbe mellett a felületet tetszőlegesen választhatjuk a Stokes-tételben). A rotációvektor $(5,2,3)$, amely nem függ a helykoordinátától. Így a felületi integrál ennek z komponensének és a kör területének szorzata lesz, azaz $3\cdot 2^2\pi = 12\pi$.

10. Feladat. A Gauss-Osztogradszkij tétel segítségével számítsuk ki a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x^2, xz, 3z)$ vektorfüggvény integrálját az $x^2+y^2+z^2 = 4$ gömbfelületre.

$\boxed{\text{Felületi int.: } 32\pi \qquad (6p)}$

$$\mathrm{div}\overline{\mathbf{v}} = 2x + 3.$$

A G-O tétel szerint a keresett integrál megegyezik a divergencia térfogatra vett integráljával. Gömbi polár koordinátákat használva

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} (2r\sin\theta\cos\phi + 3) r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 32\pi$$