Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, 2008/09. II. félév, Minta

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.

1. Feladat. Határozzuk meg i^i értékét! Adjuk meg a hatvány főértékét is!

$i^i = e^{-(\pi/2+2k\pi)}$ (4p)	főérték: $e^{-\pi/2}$ (2p)

$$i^i = e^{(\ln i)\cdot i} = e^{(\ln(1\cdot e^{i\pi/2}))\cdot i} = e^{(0+i(\pi/2+2k\pi))\cdot i} = e^{-(\pi/2+2k\pi)},$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$. A főérték $k=0$ helyettesítéssel adódik, azaz $e^{-\pi/2}$.

2. Feladat. Mely pontokban differenciálható és reguláris az $f(z) = z|z|^2$ függvény? Adjuk meg a deriváltat az origóban!

Deriválható: 0-ban (2p)	Reguláris: sehol sem (2p)	$f'(0)$: 0 (2p)

$$f(z) = (x+iy)(x^2+y^2) = x^3 + xy^2 + i(yx^2 + y^3).$$

Mivel a valós és a képzetes részt megadó függvények folytonosan deriválhatók, a C-R egyenletek teljesülése szükséges és elégséges a differenciálhatósághoz.

$$u'_x = 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 = v'_y,$$

$$u'_y = 2xy = -2xy = -v'_x.$$

Az első egyenletből látszik, hogy vagy x-nek, vagy y-nak nullának kell lennie, az első egyenletből pedig az látszik, hogy mindkét változónak nullának kell lennie. Azaz csak az origóban deriválható a függvény, így sehol sem reguláris.

Az origóbeli deriváltja:

$$f'(0) = u'_x(0,0) - u'_y(0,0)i = 0 + 0i = 0.$$

3. Feladat. Lehet-e az $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ kétváltozós függvény egy reguláris komplex függvény valós része? Ha igen határozzuk meg a harmonikus társát az $x \neq 0$ feltétel mellett!

Igen/nem: igen (3p)	Harmonikus társ: $2\mathrm{arctg}(y/x) + konst.$ (3p)

$$u'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad u''_{xx} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$u'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad u''_{yy} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

ezért $\Delta u = 0$. Azaz u harmonikus függvény, így lehet egy reguláris függvény valós része. A harmonikus társ konstans erejéig meghatározott. A C-R egyenletekből:

$$u'_x = v'_y \;\Rightarrow\; v(x,y) = 2\mathrm{arctg}(y/x) + h(x),$$

ahol $h(x)$ tetszőleges x-től függő függvény. A másik C-R egyenletből kiderül, hogy $h(x) \equiv$ konstans.

4. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = \bar{z}$ komplex függvény integrálját a 0, $1+i$, i pontok által meghatározott háromszögvonalon, amely az óramutató járásával ellentétesen van irányítva!

Az integrál értéke: i	(6p)

A függvény nem reguláris, így közvetlenül számítjuk az integrált.

$\gamma_1 : 0-(1+i)$ görbére: $\gamma_1(t) = t+ti$, $t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (t-ti)(1+i)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t = 1.$$

$\gamma_2 : (1+i)-i$ görbére: $\gamma_2(t) = t+i$, $t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_1^0 t-i\,\mathrm{d}t = -1/2+i.$$

$\gamma_3 : i-0$ görbére: $\gamma_3(t) = ti$, $t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_1^0 (-ti)i\,\mathrm{d}t = -1/2.$$

Így az integrál értéke a fenti integrálok összege, azaz i.

5. Feladat. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétesen irányított $|z-2| = 1$ körvonalra vett integrálját az

$$f(z) = \frac{3z-i}{z^2-2z}$$

függvénynek!

Az integrál értéke: $\pi(1+6i)$	(6p)

A Cauchy-féle integrálformulát használva:

$$\int_G \frac{3z-i}{z^2-2z}\,\mathrm{d}z = \int_G \frac{(3z-i)/z}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{3\cdot 2-i}{2} = \pi(1+6i),$$

mivel a második képlet számlálójában álló függvény már reguláris a görbe által határolt síkidom belsejében.

6. Feladat. Adjuk meg az

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2i)}$$

függvény $2i$ körüli 2 sugarú gyűrűben konvergens Laurent-sorának c_4 együtthatóját ($(z-2i)^4$ együtthatója)!

c_4: $-6i/2^7$	(6p)

$$c_4 = \frac{1}{2\pi i}\oint_G \frac{\frac{1}{z^2(z-2i)}}{(z-2i)^5}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_G \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-2i)^6}\,\mathrm{d}z = \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^{(5)}}{5!}\Big|_{z=2i},$$

ahol az általánosított Cauchy-formulát használtuk. Mivel $\left(\frac{1}{z^2}\right)^{(5)} = -720/z^7$, ezért kapjuk, hogy $c_4 = -6i/2^7$.

7. Feladat. Adjuk meg az

$$f(t) = \begin{cases} (t-2)^3, & t \geq 2, \\ 0, & t < 2 \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját!

$L[f](s) = 3!e^{-2s}/s^4$ (6p)

Az

$$L[H(t-a)f(t-a)](s) = L[f](s)e^{-as}$$

képlet szerint a Laplace-transzformált

$$\frac{3!e^{-2s}}{s^4}.$$

8. Feladat. Adjuk meg az $f_1(t) = t$ és $f_2(t) = t^2$ függvények konvolúcióját!

$(f_1 * f_2)(t) = t^4/12$ (6p)

$$L[t * t^2](s) = \frac{1}{s^2}\frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^5} = L[2t^4/4!](s) = L[t^4/12](s),$$

így a konvolúció $t^4/12$. Ugyanerre juthatunk integrálással is

$$\int_0^t x(t-x)^2 \, \mathrm{d}x = t^4/12.$$

9. Feladat. Határozzuk meg az $y' = y(2 + \sin x)$ differenciálegyenlet általános megoldását!

$y(x) = Ce^{2x-\cos x}$, ahol $C \in \mathbb{R}$. (6p)

Szétválasztás után az alábbi alakot nyerjük:

$$\frac{y'}{y} = 2 + \sin x,$$

majd x-szerinti integrálással

$$\ln|y| = 2x - \cos x + c, \ c \in \mathbb{R},$$
$$|y| = e^{2x-\cos x+c},$$
$$|y| = e^{2x-\cos x}c_1, \ c_1 > 0,$$
$$y = e^{2x-\cos x}c_1, \ c_1 \neq 0,$$

és ha $c_1 = 0$ is megengedett, akkor a megoldás tartalmazza az y-nal való osztás miatt elvesztett $y(x) \equiv 0$ megoldást is. Tehát a megoldás $y(x) = Ce^{2x-\cos x}$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

10. Feladat. Határozzuk meg az $y' = 2\sqrt{y+1}\cos x$, $y(\pi) = 0$ kezdetiérték-feladat megoldását!

$y(x) = (\sin x + 1)^2 - 1$ (6p)

Szétválasztás után kapjuk, hogy

$$\frac{y'}{\sqrt{y+1}} = 2\cos x,$$

majd x-szerint integrálunk:

$$2\sqrt{y+1} = 2\sin x + c.$$

Helyettesítsük a kezdeti feltételt:

$$2\sqrt{0+1} = 2\sin \pi + c,$$

azaz

$$c = 2.$$

Tehát a megoldás $2\sqrt{y+1} = 2\sin x + 2$, ahonnét $y(x) = (\sin x + 1)^2 - 1$.