Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, 2008/09. II. félév, A csoport

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.

1. Feladat. Határozzuk meg $(-2)^{-i}$ értékét! Adjuk meg a hatvány főértékét is!

$(-1)^{-i} = e^{-i\ln 2+\pi(1+2k)}$ (4p)	főérték: $e^{-i\ln 2+\pi}$ (2p)

$$(-2)^{-i} = e^{(\ln(-2))\cdot(-i)} = e^{(\ln(2\cdot e^{i\pi}))\cdot(-i)} = e^{-i\ln 2+\pi(1+2k)},$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$. A főérték $k = 0$ helyettesítéssel adódik, azaz $e^{-i\ln 2+\pi}$.

2. Feladat. Mely pontokban differenciálható és reguláris az $f(z) = 2z - \bar{z}$ függvény?

Deriválható: sehol sem (3p)	Reguláris: sehol sem (3p)

$$f(z) = 2(x+iy) - (x-iy) = x + 3yi.$$

Mivel a valós és a képzetes részt megadó függvények folytonosan deriválhatók, a C-R egyenletek teljesülése szükséges és elégséges a differenciálhatósághoz.

$$u'_x = 1 \neq 3 = v'_y,$$

így a másik egyenletet már le sem kell ellenőrizni. Azaz a függvény sehol sem deriválható és sehol sem reguláris.

3. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = z^2-2z+5$ függvény integrálját az 1 kezdőpontú és i végpontú szakaszon! $\boxed{\text{Az integrál értéke: } -10/3 + 14i/3 \quad \text{(6p)}}$

A függvény reguláris, így a Newton-Leibniz szabállyal számítható az integrál.

$$\int_G (z^2 - 2z + 5) = \left[\frac{z^3}{3} - z^2 + 5z\right]_1^i = \mathrm{d}z = \frac{-10}{3} + \frac{14}{3}i.$$

4. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = \bar{z}$ komplex függvény integrálját az origó középpű 2 egység sugarú kör valós tengely fölé eső részéből és a $[-2, 2]$ szakaszból álló, óramutató járásával ellentétesen irányított zárt görbére!

Az integrál értéke: $4\pi i$ (6p)

A függvény nem reguláris, így közvetlenül számítjuk az integrált.

γ_1 legyen a $[-2, 2]$ szakasz: $\gamma_1(t) = t$, $t \in [-2, 2]$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-2}^{2} t\,\mathrm{d}t = 0.$$

γ_2 legyen a körív: $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 1\pi]$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} 2e^{-it}2e^{it}i\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 4i\,\mathrm{d}t = 4\pi i.$$

Így az integrál értéke a fenti integrálok összege, azaz $4\pi i$.

5. Feladat. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétesen irányított $|z-1|=2$ körvonalra vett integrálját az

$$f(z)=\frac{e^z}{z^3-8}$$

függvénynek! $\boxed{\text{Az integrál értéke: } e^2\pi i/6 \qquad \text{(6p)}}$

A $z=2$ pont elsőrendű pólus és csak ez az izolált szinguláris hely esik a kör belsejébe. Így a residuum-tételt használva

$$\oint_G \frac{e^z}{z^3-8}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_2 f = 2\pi i \frac{e^2}{(z^3-8)'|_{z=2}} = 2\pi i \frac{e^2}{3\cdot 2^2} = e^2\pi i/6.$$

6. Feladat. Adjuk meg az

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-2i)}$$

függvény $2i$ körüli 2 sugarú gyűrűben konvergens Laurent-sorának c_3 együtthatóját ($(z-2i)^3$ együtthatója)! $\boxed{c_3\text{: } -5/64 \qquad \text{(6p)}}$

$$c_3=\frac{1}{2\pi i}\oint_G \frac{\frac{1}{z^2(z-2i)}}{(z-2i)^4}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_G \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-2i)^5}\,\mathrm{d}z = \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^{(4)}}{4!}\Big|_{z=2i},$$

ahol az általánosított Cauchy-formulát használtuk. Mivel $\left(\frac{1}{z^2}\right)^{(4)}=120/z^6$, ezért kapjuk, hogy $c_3=-5/64$.

7. Feladat. Ismerve, hogy $L[t\sin t](s)=2s/(s^2+1)^2$, adjuk meg az $L[(t\sin t)'](s)$ függvényt! $\boxed{L[(t\sin t)'](s)=2s^2/(s^2+1)^2 \qquad \text{(6p)}}$

$$L[(t\sin t)'](s)=sL[t\sin t](s)-0\cdot\sin 0 = s\frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

8. Feladat. Állítsuk elő az alábbi függvényt parciális törtek összegeként, majd ennek segítségével adjuk meg inverz Laplace-transzformáltját!

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+1)} \qquad \boxed{L^{-1}[F](t)=1-\cos t \qquad \text{(6p)}}$$

Az előállítást

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

alakban kereshetjük. Közös nevezőre hozás után adódik, hogy $A=1$, $B=-1$ és $C=0$, azaz

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}.$$

Az inverz Laplace-transzformációt tagonként számolhatjuk, azaz

$$L^{-1}[F](t)=1-\cos t.$$

9. Feladat. Határozzuk meg az $y'=3e^yx^2$ differenciálegyenlet általános megoldását! $\boxed{y(x)=-\ln(-x^3-c) \qquad \text{(6p)}}$

Szétválasztás után az alábbi alakot nyerjük:

$$\frac{1}{e^y}=3x^2,$$

majd x-szerinti integrálással

$$-e^{-y} = x^3 + c, \; c \in \mathbb{R},$$

$$e^{-y} = -x^3 - c,$$

$$-y = \ln(-x^3 - c),$$

$$y = -\ln(-x^3 - c),$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

10. Feladat. Határozzuk meg az $y' = 2x\cos^2 y$, $y(0) = \pi/4$ kezdetiérték-feladat megoldását! $\boxed{y(x) = \operatorname{arctg}(x^2+1) \qquad (6p)}$

Szétválasztás után kapjuk, hogy

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 2x,$$

majd x-szerint integrálunk:

$$\operatorname{tg} y = x^2 + c.$$

Helyettesítsük a kezdeti feltételt:

$$\operatorname{tg}(\pi/4) = c,$$

azaz

$$c = 1.$$

Tehát a megoldás $y = \operatorname{arctg}(x^2 + 1)$.