Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, I. zárthelyi dolgozat, 2008/09. II. félév, A. megoldások

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.

A feladatokban a vektorok koordinátái a szokásos Descartres-féle derékszögű koordinátarendszerben adottak $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

1. Feladat. Adjuk meg annak a testnek a térfogatát, melyet az xy-síkbeli (0,0), (-2,2) és (-2,-2) pontok által meghatározott háromszöglap felett a $z = 0$ és $z = x^2 - 2y$ felületek határolnak! | Térfogat: 124/15=8 4/15 (6p) |

Mivel a háromszög feletti rész térfogata kellett, így csak azt a tartományt kell vizsgálni, melyre $x^2 - 2y \geq 0$, azaz $y \leq x^2/2$. Az $y = x^2/2$ függvény grafikonja az $y = -x$ függvény grafikonja "alatt" helyezkedik el. Így

$$V = \int_{-2}^{0} \int_{x}^{x^2/2} x^2 - 2y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 124/15.$$

2. Feladat. Adjuk meg az $\bar{\mathbf{r}}(t) = (t^2/2, 2t^3/3, t^4/2)$ görbe ívhosszát a $t_0 = 0$ és $t_1 = 2$ paraméterű pontok között! | Ívhossz: 10 (6p) |

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (t, 2t^2, 2t^3),$$

így az ívhossz

$$i = \int_0^2 \sqrt{t^2 + 4t^4 + 4t^6} \, \mathrm{d}t = \int_0^2 t\sqrt{(1+2t^2)^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^2 t(1+2t^2) \, \mathrm{d}t = 10.$$

3. Feladat. Adjuk meg az $\bar{\mathbf{r}}(t) = (t^2 - 1, t + 2, t^3 - t)$ görbe $t = 1$ pontjához tartozó binormális egységvektort és a simulósík egyenletét!

| Binormális: $(1/\sqrt{104})(6, -8, -2)$ (5p) | Síkegyenlet: $6x - 8(y-3) - 2z = 0$ (1p) |

$$\dot{\mathbf{r}}(1) = (2, 1, 2), \;\; \ddot{\mathbf{r}}(1) = (2, 0, 6)$$

A simulósík egy normálvektora $\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1) = (6, -8, -2)$. Mivel $\bar{\mathbf{r}}(1) = [0, 3, 0]$, ezért a síkegyenlet $6x - 8(y-3) - 2z = 0$. A binormális egységvektor pedig

$$\mathbf{B} = (1/\sqrt{104})(6, -8, -2).$$

4. Feladat. Határozzuk meg az $\bar{\mathbf{r}}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ görbe görbületét és torzióját a $t = 0$ paraméterű pontban! | Görbület: $\sqrt{2}/4$ (3p) | Torzió: $-\sqrt{2}/4$ (3p) |

$$|\dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0)| = \sqrt{8}, \;\; |\dot{\mathbf{r}}(0)| = 2, \;\; \dot{\mathbf{r}}(0)\ddot{\mathbf{r}}(0)\dddot{\mathbf{r}}(0) = -2\sqrt{2}.$$

Tehát

$$\kappa = \sqrt{2}/4, \quad \tau = -\sqrt{2}/4.$$

5. Feladat. Határozzuk meg a $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ felület azon részének felszínét, amely az xy-síkbeli origó középpontú egységkör felett található!

Felszín: $2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)$	(6p)

Egy kétváltozós f függvény grafikonjának felszínét kell meghatározni a K egységkör felett, ahol $f(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}$.

$$F = \iint_K \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_K \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{2-x^2-y^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = ...$$

Síkbeli polárkoordinátákra áttérve

$$... = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\frac{r^2}{2-r^2}} r\ \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r = 2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1).$$

6. Feladat. Adjuk meg azokat az (x,y,z) pontokat, melyekben a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (2xz, 3xy, 5yx)$ vektorfüggvény rotációja nulla!

(x,y,z): $(0,0,z)$, z tetsz.	(6p)

$$\mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (5x, 2x-5y, 3y),$$

ahonnét látszik, hogy x és y csak nulla lehet, z pedig tetszőleges.

7. Feladat. Határozzuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2), z)$ vektorfüggvény vonalintegrálját a $z=1$ síkbeli origó középpontú egységkörön, amely a z-tengely irányából nézve az óramutató járásával ellentétesen van irányítva!

Vonalintegrál: 2π	(6p)

A paraméterezett görbe $\overline{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $t \in [0,2\pi]$, deriváltja $\dot{\overline{\mathbf{r}}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. Ezt a vektorfüggvénybe helyettesítve kapjuk, hogy a vonalintegrál

$$\int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 1)(-\sin t, \cos t, 0)\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = 2\pi.$$

8. Feladat. Adjuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (2x, -y^2, 4/(1+z^2))$ vektormező munkáját a (0,0,0) és a (3,3,1) pontokat összekötő szakaszon a potenciálfüggvény segítségével!

Munka: π	(6p)

Egyszerre látszik, hogy

$$\phi(x,y,z) = x^2 - y^3/3 + 4\mathrm{arctg} z,$$

Így $\phi(3,3,1) - \phi(0,0,0) = \pi$

9. Feladat. Használjuk a Stokes-tételt a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (2y, 3x, -z^2)$ vektorfüggvény xy-síkbeli origó középpontú egységsugarú körre vett vonalintegráljának meghatározására!

Vonalint.: π	(6p)

A vonalintegrál megegyezik a rotációnak a felületre vett integráljával. Mivel most $\mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (0,0,1)$, ami merőleges az egységkörre és állandó, így az integrál a z komponens és a kör területének szorzata, azaz $1 \cdot 1^2\pi = \pi$.

Másik lehetőség, hogy paraméterezzük az egységkört: $\overline{\mathbf{r}}(u,v) = (u\sin v, u\cos v, 0)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,2\pi]$. $\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v = (0,0,u)$. Így a felületi integrál

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (0,0,1)(0,0,u)\, \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\, \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \pi.$$

10. Feladat. A Gauss-Osztogradszkij tétel segítségével számítsuk ki a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (3x+y^{99}, y^2-\sin(x^2z), xz-ye^{x^2})$ vektorfüggvény felületi integrálját a $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,1], y \in [0,2], z \in [0,3]\}$ téglatest felületén!

Felületi int.: 33	(6p)

div $\overline{\mathbf{v}} = 3 + 2y + x$, ezt kell az adott téglatesten integrálni.

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (3 + 2y + x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 33.$$