Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, 2009/10. II. félév, A csoport

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.
A dolgozathoz csak íróeszköz és üres A4-es papír használható. Számológép nem használható!

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x+iy) = 2x+iy$ komplex függvény integrálját az 1 kezdőpontú és $1+i$ végpontú szakaszon! Az integrál értéke: $2i - 1/2$ (6p)

2. Feladat. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétesen irányított $|z| = 1$ körvonalra vett integrálját az $f(z) = \sin(e^z)/z^2$ függvénynek!

Az integrál értéke: $2\pi i \cos 1$ (6p)

3. Feladat. Adjuk meg az $f(z) = (\cos z - 1)/z^3$ függvény izolált szinguláris helyeihez tartozó residuumok értékét! Residuumok: $-1/2$ (6p)

4. Feladat. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétesen irányított $|z| = 3$ körvonalra vett integrálját az

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-4)(z-2i)}$$

függvénynek!

Az integrál értéke: $2\pi i \left(\frac{1}{(-i-4)(-3i)} + \frac{1}{(2i-4)3i} \right) = \pi(2-9i)/85$ (6p)

5. Feladat. Állítsuk elő az alábbi függvényt parciális törtek összegeként, majd ennek segítségével adjuk meg inverz Laplace-transzformáltját!

$$F(p) = \frac{p}{(p+3)(p+5)}$$

$L^{-1}[F](t) = -3e^{-3t}/2 + 5e^{-5t}/2$ (6p)

6. Feladat. Legyen $f(t) = t$. Adjuk meg az $(f \star f)(t)$ függvényt, azaz az f függvény önmagával való konvolúcióját!

$(f \star f)(t) = t^3/6$ (6p)

7. Feladat. Határozzuk meg az $xy' + y = 0$, $y(2) = 6$ kezdetiérték-feladat megoldását!

$y(x) = 12/x$ (6p)

8. Feladat. Határozzuk meg az $(xy + y^2) - x^2y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását a $z = y/x$ helyettesítéssel az $I = (0, \infty)$ intervallumon!

$y(x) = -x/(\ln x + c)$ (6p)

9. Feladat. Határozzuk meg az $y' - y/x = xe^x$ differenciálegyenlet általános megoldását! $y(x) = x(e^x + c)$ (6p)

10. Feladat. Határozzuk meg a $2xy + (x^2 - y^2)y' = 0$ egzakt differenciálegyenlet általános megoldását (implicit alakban)!

Megoldás: $x^2y - y^3/3 = c$ (6p)

Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, 2009/10. II. félév, B csoport

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.

A dolgozathoz csak íróeszköz és üres A4-es papír használható. Számológép nem használható!

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x+iy) = 2x+iy$ komplex függvény integrálját az i kezdőpontú és $1+i$ végpontú szakaszon!

Az integrál értéke: $1+i$	(6p)

2. Feladat. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétesen irányított $|z| = 1$ körvonalra vett integrálját az $f(z) = \sin(2z+1)/z^2$ függvénynek!

Az integrál értéke: $4\pi i \cos 1$	(6p)

3. Feladat. Adjuk meg az $f(z) = (\sin z - z)/z^4$ függvény izolált szinguláris helyeihez tartozó residuumok értékét!

Residuumok: $-1/6$	(6p)

4. Feladat. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétesen irányított $|z| = 3$ körvonalra vett integrálját az

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+4)(z-2i)}$$

függvénynek!

Az integrál értéke: $2\pi i \left(\frac{1}{-i(i+4)} + \frac{1}{i(2i+4)} \right) = -\pi(6+7i)/85$	(6p)

5. Feladat. Állítsuk elő az alábbi függvényt parciális törtek összegeként, majd ennek segítségével adjuk meg inverz Laplace-transzformáltját!

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+5)}$$

$L^{-1}[F](t) = e^{-3t}/2 - e^{-5t}/2$	(6p)

6. Feladat. Legyen $f(t) = 1$ és $g(t) = t^2$. Adjuk meg az $(f \star g)(t)$ függvényt, azaz az f és g függvények konvolúcióját!

$(f \star g)(t) = t^3/3$	(6p)

7. Feladat. Határozzuk meg az $yy' + x = 0$, $y(-2) = 4$ kezdetiérték-feladat megoldását!

$y(x) = \sqrt{20 - x^2}$	(6p)

8. Feladat. Határozzuk meg az $(xy - y^2) - x^2y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását a $z = y/x$ helyettesítéssel az $I = (0, \infty)$ intervallumon!

$y(x) = x/(\ln x + c)$	(6p)

9. Feladat. Határozzuk meg az $y' + 4y - e^{-x} = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

$y(x) = e^{-x}/3 + ce^{-4x}$	(6p)

10. Feladat. Határozzuk meg az $ye^x + (2y + e^x)y' = 0$ egzakt differenciálegyenlet általános megoldását (implicit alakban)!

Megoldás: $ye^x + y^2 = c$	(6p)