

Név:NEPTUN kód.....Gyak. vez.:

Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, megoldások, 2010/11. II. félév

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.

A dolgozathoz csak íróeszköz és üres A4-es papír használható. Számológép nem használható!

1. FELADAT. Adjuk meg $\text{Log}(i^2)$ és $2\text{Log}(i)$ értékeit!

$$\text{Log}(i^2) = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \quad (3\text{p}), 2\text{Log}(i) = i(\pi + 4k\pi), k \in \mathbb{Z} \quad (3\text{p})$$

2. FELADAT. Adjuk meg azokat a pontokat (ha vannak ilyenek), melyekben az $f(x + iy) = x^3 + i(1 - y)^3$ komplex függvény deriválható, ill. reguláris!

$$\text{Deriválható: } i\text{-ben} \quad (3\text{p}), \text{ reguláris: sehol sem} \quad (3\text{p})$$

3. FELADAT. Határozzuk meg, hogy az $f(x + iy) = x^3 + i(1 + y)^3$ komplex függvény az $1 - 2i$ és $2 - i$ pontok közül melyikben deriválható, és abban a pontban adjuk is meg a derivált értékét!

$$\text{Deriválható: } 1 - 2i \quad (3\text{p}), \text{ derivált értéke: } 3 \quad (3\text{p})$$

4. FELADAT. Határozzuk meg az $f(z) = \cos(z/2)$ komplex függvény integrálját a $0 + 0i$ és a $\pi + 2i$ pontokat összekötő szakaszon!

$$\text{Az integrál értéke: } e + 1/e \quad (6\text{p})$$

5. FELADAT. Határozzuk meg az $f(x + iy) = x^2 + y + ixy$ komplex függvény integrálját a $0 + 0i$ és az $1 + i$ pontokat összekötő szakaszon!

$$\text{Az integrál értéke: } 1/2 + (7/6)i \quad (6\text{p})$$

6. FELADAT. Határozzuk meg az $f(z) = 1/z$ komplex függvény $z_0 = i$ pont körüli $|z - i| < 1$ tartománybeli Laurent-sorának c_5 együtthatóját ($(z - i)^5$ együtthatója)

$$c_5 = 1 \quad (6\text{p})$$

7. FELADAT. Adjuk meg az $f(z) = 1/(z(z - 1))$ függvény $z_0 = 0$ -beli Laurent-sorát az $1 < |z|$ tartományon!

$$\text{Laurent-sor: } \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \quad (6\text{p})$$

8. FELADAT. Adjuk meg az $f(z) = (z^2 + 2)/(z^2(z - i))$ függvény izolált szinguláris helyeihez tartozó residuumok értékét!

$$\text{Residuumok: } i\text{-ben } -1, 0\text{-ban } +2 \quad (6\text{p})$$

9. FELADAT. Határozzuk meg az

$$\oint_G \frac{\cos z}{z^2 - 6z + 5} dz$$

integrált, ha G az origó körüli 4 sugarú, óramutató járásával ellentétesen irányított kör a komplex számsíkon!

$$\text{Az integrál értéke: } -i\pi \cos(1)/2 \quad (6\text{p})$$

10. FELADAT. Adjuk meg az $f(t) = (t^2 - 1) \cos t$ függvény Laplace-transzformáltját!

$$\text{A Laplace-transzformált: } -\frac{p(7+p^4)}{(1+p^2)^3} \quad (6\text{p})$$