Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, I. zárthelyi dolgozat, megoldások, 2010/11. II. félév

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen. A kitöltött feladatlapot és a kidolgozott feladatokat is be kell adni.

A dolgozathoz csak íróeszköz és üres A4-es papír használható. Számológép nem használható!

A feladatokban a vektorok koordinátái a szokásos Descartres-féle derékszögű koordinátarendszerben adottak $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

1. Feladat. Az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4)$ vektor-skalár függvény egy test térbeli helyét adja meg a t idő függvényében. Mekkora utat tesz meg a test a $t = -1$ és $t = 2$ időpontok között? Adjuk meg a sebesség nagyságát is az idő függvényében!

$\lvert\dot{\overline{\mathbf{r}}}(t)\rvert = 12(1+t^2)\lvert t\rvert$ (2p)	Út: 81 (4p)

A sebesség nagysága nem lehet negatív érték. Ez a képletekből úgy látszik, hogy a t^2-es tényezőből a gyökvonás után $|t|$ lesz. Ezek után az út meghatározásához a sebességvektor hosszát kell integrálni -1 és 2 között. Mivel az integrandus abszolút értéket tartalmaz, az integrált úgy kell kiszámítani, hogy külön kell integrálni a $[-1, 0]$ és a $[0, 2]$ intervallumokon, majd a két integrál értékét összeadni.

2. Feladat. Adjuk meg az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16)$ vektor-skalár függvény $t = 2$ pontjához tartozó simulósík és binormális egyenes egyenletét!

Simulósík: $6x + 2y - 3z = 20$(3p)	Binormális: $(x + 1)/6 = (y - 13)/2 = -z/3$ (3p)

A binormális irányába mutató vektor pl. (6,2,-3). Ez a vektor lesz a simulósík normálvektora és a binormális egyenes irányvektora. Az adott pont, amit az egyenes és a sík is tartalmaz az $\overline{\mathbf{r}}(2) = (-1, 13, 0)$.

3. Feladat. Adjuk meg az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (t^2 - 1, t + 2, t^3 - t)$ vektor-skalár függvény $t = 1$ pontjában a görbület és a torzió értékét!

Görbület: $\sqrt{104}/27$ (3p)	Torzió: $-3/26$ (3p)

4. Feladat. Mekkora munkát végez a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (y, x^2 - x, 0)$ erőtér az xy-síkbeli egységnégyzet kontúrján ((0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0) csúcsokkal határolt négyzet), ha azt a z-tengely pozitív irányából nézve az óramutató járásával ellentétesen irányítottuk?

Munka: -1 (6p)

Munkát az erőtér csak az (1,1,0) és (0,1,0) pontok között végez, mert a másik három oldalon az erőtér merőleges az oldalszakaszokra, így nem végez munkát. Az adott szakasz paraméterezése pl. $\overline{\mathbf{r}}(t) = (1 - t, 1, 0)$ és így a tanult képletet használva a munkára -1 adódik. A feladat természetesen megoldható a Stokes-tétel segítségével is.

5. Feladat. Adjuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (x + z, y^2, x + z^3)$ vektormező potenciálját, majd számítsuk ki az erőtér munkáját amíg egy testet a $(0, 0, 0)$ pontból az (1,1,1) pontba mozgat!

Potenciál: $x^2/2 + zx + y^3/3 + z^4/4 + konst.$ (3p)	Munka: $25/12$ (3p)

Az $x + z$ első koordináta a potenciálfüggvény x-szerinti deriváltja, így a ϕ potenciálfüggvény $\phi(x, y, z) = x^2/2 + zx + g(y, z)$ alakú. Ezt deriválva y-szerint és összevetve az y^2 második koordinátafüggvénnyel, azt kapjuk, hogy $g'_y = y^2$, azaz $g(y, z) = y^3/3 + h(z)$. Most z-szerint deriválva kapjuk, hogy $h(z) = z^4/4 + konstans$. Ha a potenciált meghatároztuk, akkor a munka a potenciál megváltozása a kezdőpont és a végpont között.

6. Feladat. Határozzuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (x,-x,z)$ vektormező felületi integrálját az $\overline{\mathbf{r}}(u,v) = (\sin u, v, \cos u)$, $u \in [0,\pi]$, $v \in [0,2]$ hengerpalást-darabra, ha a hengerpalástdarab a hengerből kifelé van irányítva! $\boxed{\text{Az integrál értéke: } 2\pi \quad (6p)}$

Az alábbi integrált kell meghatározni:

$$\int_0^2 \int_0^\pi (\sin u, -\sin u, \cos u)(\sin u, 0, \cos u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^2 \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\pi$$

7. Feladat. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - y^2$ nyeregfelület grafikonjából az $x^2 + y^2 = 1$ henger által kimetszett felületdarab felszínét! $\boxed{\text{Felszín: } \pi(5\sqrt{5}-1)/6 \quad (6p)}$

Az

$$\iint_K \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

integrált kell kiszámítani, ahol K az 1 sugarú, origó középpontú kör az xy-síkban. Polárkoordinátás helyettesítést használva így az

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1+(2r)^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

integrált kell meghatározni.

8. Feladat. Legyen $\overline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ egy adott vektor és tekintsük a $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{r}}) = \overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{r}}$ vektormezőt ($\overline{\mathbf{r}} = (x,y,z)$)! Adjuk meg $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{r}})$ divergenciáját! $\boxed{(\mathrm{div}\overline{\mathbf{v}})(\overline{\mathbf{r}}) = 0 \quad (6p)}$

9. Feladat. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2/y^2$ függvény integrálját az $x = 2$ és $y = x$ egyenesek és az $xy = 1$ hiperbola által határolt véges síktartományon!
$\boxed{\text{Az integrál értéke: } 9/4 \quad (6p)}$

$$\int_0^2 \int_{1/x}^2 \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}$$

10. Feladat. Az $\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ integrált az $x = u$ és $y = u \cdot v$ helyettesítéssel számoljuk ki. Adjuk meg a koordináta-transzformáció Jacobi-determinánsát és az integrál értékét! $\boxed{\text{Jacobi: } \pm u \quad (3p)}$ $\boxed{\text{Az integrál értéke: } (1-\cos 1)/2 \quad (3p)}$

A Jacobi-mátrixot felírva kapjuk, hogy a Jacobi-determináns u lesz. Az u és v paraméter is 0 és 1 között változik. A helyettesítést elvégezve az

$$\int_0^1 \int_0^1 u \sin u^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

értéket nyerjük.