Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, 2011/12. II. félév, megoldások

1. Feladat. Adjuk meg a 4^{3+i} hatvány értékeit és főértékét (ez utóbbit trigonometrikus alakban)!

Értékei= $64e^{-2k\pi}e^{i\ln 4}$, $k \in \mathbb{Z}$ (3p), Főérték=$64(\cos(\ln 4) + i\sin(\ln 4))$ (3p)

2. Feladat. Adjuk meg (ha vannak ilyenek) azokat a komplex függvényeket, melyek mindenhol regulárisak és valós rész függvényük $u(x, y) = xy$!

$f(z) = f(x + iy) = xy + i((y^2 - x^2)/2 + konstans)$ (6p)

3. Feladat. Adjuk meg az $f(x + iy) = (1 - x)^3 + iy^3$ függvény deriváltjait azokban a pontokban, ahol deriválható!

Deriválható: 1-ben (3p), Derivált: 0 (3p)

4. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = \overline{z}$ komplex függvény integrálját a $-1 + i$ és a $1 + i$ pontokat összekötő $y = x^2$ parabolaíven (irányítás: balról jobbra)!

Az integrál értéke: $2i/3$ (6p)

5. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = (\mathrm{Ln}(z+3)+\cos z)/(z+1)^2$ komplex függvény integrálját az origó közepű, 2 sugarú körvonalra (irányítás: óramutató járásával ellentétes, Ln a főértéket jelenti)!

Az integrál értéke: $i(\pi + 2\pi \sin 1)$ (6p)

6. Feladat. Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = (-2z + 3)/(z^2 - 3z + 2)$ komplex függvényt az $1 < |z| < 2$ gyűrűben!

$f(z) = \ldots + \frac{-1}{z^3} + \frac{-1}{z^2} + \frac{-1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$ (6p)

7. Feladat. Adjuk meg az $f(z) = 1/(z^3 - z^4)$ függvény residuumainak értékét az izolált szingularitásokban, és határozzuk meg az integráljának értékét az origó közepű, 1/2 sugarú, *óramutató járásának megfelelően* irányított körvonalra!

Residuumok: 0-ban 1, 1-ben -1 (3p) Integrál értéke: $-2\pi i$ (3p)

8. Feladat. Adjuk meg az $f(t) = \cos(2t) \star 1$ függvény Laplace-transzformáltját!

A Laplace-transzformált: $\frac{1}{s^2+4}$ (6p)

9. Feladat. Határozzuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (-e^y, e^z, e^x)$ vektormező integrálját azon a $z = x + y$ síkban fekvő zárt görbén, amely a (0,0,0), (1,0,1), (1,1,2), (0,1,1), (0,0,0) pontokat egymás után összekötő egyenes szakaszokból áll (Stokes-tétel)!

Integrál értéke: $e^2 - 1$ (6p)

10. Feladat. Határozzuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (x, xy, z)$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq h$, $h > 0$ henger kifelé irányított teljes felületére!

Integrál értéke: $2\pi h$ (6p)