Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, I. zárthelyi dolgozat, 2011/12. II. félév

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 60 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 18 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.

A dolgozathoz csak íróeszköz és üres A4-es papír használható. Számológép nem használható!

A feladatokban a vektorok koordinátái a szokásos Descartres-féle derékszögű koordinátarendszerben adottak $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

1. Feladat. Számítsuk ki az ívhosszt a $t \in [0, 2]$ intervallumon az $\overline{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$ görbe esetén! | Ívhossz= 2 (6p) |

2. Feladat. Adjuk meg az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (t\cos(\ln(t)), t\sin(\ln(t)), t)$ görbe görbületét a $t = 1$ paraméterű görbepontban! | Görbület: $\sqrt{2}/3$ (6p) |

3. Feladat. Adjuk meg az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (t, t^2, t^3)$ görbe $t = 1$ pontjához tartozó torzió értékét és a simulósík egyenletét!

Torzió: 3/19 (3p)	Síkegyenlet: $3(x-1)-3(y-1)+(z-1) = 0, 3x-3y+z = 1$ (3p)

4. Feladat. Adjuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (z, x, y)$ vektor-vektor függvény integrálját az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ csavarvonal (1,0,0) és $(1, 0, 4\pi)$ pontjai között!

| Az integrál értéke: 6π (6p) |

5. Feladat. Ha egy xz síkban elhelyezkedő b sugarú kört, melynek középpontja a távolságra van a z-tengelytől $(a > b)$, megforgatunk a z-tengely körül, akkor egy ún. tóruszfelületet kapunk. Határozzuk meg a tórusz felszínét, ha paraméterezése $\overline{\mathbf{r}}(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$, ahol $0 \le u, v \le 2\pi$.

| Felszín: $4\pi^2 ab$ (6p) |

6. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) = x^2y - yx^3$ függvény grafikonjához az $(x, y) = (1, 2)$ ponthoz tartozó pontban húzott érintősík és normálegyenes egyenletét!

érintősík: $2x + z = 2$ (3p)	normálegyenes: $(x - 1)/2 = z, y = 2$ (3p)

7. Feladat. Mekkora munkát végez a $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{r}}) = 5|\overline{\mathbf{r}}|^3\overline{\mathbf{r}}$ erőtér egy olyan görbén, amely az origó közepű, 1 sugarú gömbfelület egy tetszőleges pontját köti össze az origó közepű, 5 sugarú gömbfelület egy tetszőleges pontjával $(\overline{\mathbf{r}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$?

| Munka: $5^5 - 1 = 3124$ (6p) |

8. Feladat. Számítsuk ki a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (e^y, -e^z, e^x)$ vektor-vektor függvény felületi integrálját az $x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$ hengerfelületdarabra, ha a felület a hengerből kifelé irányított!

| Felületi int.: $2e^3 - 3e^2 + 1$ (6p) |

9. Feladat. Határozzuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (-e^y, e^z, e^x)$ vektormező rotációjának integrálját a $z = x + y$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ felfelé irányított síkdarabon!

| Integrál értéke: $e^2 - 1$ (6p) |

10. Feladat. Határozzuk meg a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (xz^2, x^2y - x^3, 2xy + y^2z)$ vektor-vektor függvény divergenciájának integrálját az origó közepű, $a > 0$ sugarú, xy-sík "feletti" félgömbtartományra! | Az integrál értéke: $2\pi a^5/5$ (6p) |