Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, megoldások, 2012/13. II. félév

1. Feladat. Adjuk meg az $(1+i)^{2i}$ komplex szám főértékének trigonometrikus alakját!

$(1+i)^{2i} = e^{-\pi/2}(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2))$	(6p)

2. Feladat. Adjuk meg az $f(z) = 1/z$ komplex függvény integrálját az i és az 1 pontokat összekötő szakaszon!

Az integrál értéke: -$i\pi/2$	(6p)

Megoldás: Mivel az adott szakasz egy környezetében Lnz primitív függvénye az $1/z$ függvénynek, az integrál a Newton–Leibniz-szabály segítségével integrálható. Az integrál értéke tehát

$$\mathrm{Ln}(1) - \mathrm{Ln}(i) = 0 - (\ln 1 + i\pi/2) = -i\pi/2.$$

3. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int_G \frac{1}{z^2 - 2i}$$

integrált a $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = 2\}$ pozitívan irányított körvonalra!

Az integrál értéke: $\pi/2 + i\pi/2$	(6p)

Megoldás: A függvény nevezőjének zérushelyei az $1+i$ ill. $-1-i$, azaz $z^2 - 2i = (z-i-1)(z+1+i)$. A zérushelyek közül (ezek a függvény izolált szingularitásai) csak az $1+i$ (elsőrendű pólus) esik az 1 2 sugarú környezetébe, így pl. a reziduum-tétel miatt

$$\int_G \frac{1}{z^2-2i} = 2\pi i \frac{1}{2(1+i)} = \pi \frac{i}{1+i} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} i,$$

ahol a reziduumot az elsőrendű pólusokra vonatkozó számláló értéke a szinguláris pontban per a nevező deriváltjának értéke a szinguláris pontban képlettel számoltuk.

4. Feladat. Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = z/(1+z)$ komplex függvényt a $|z| < 1$ körlapon és a $|z| > 1$ körgyűrűben!

$|z| < 1:\ f(z) = z - z^2 + z^3 - z^4 \pm \ldots$	(3p)
$|z| > 1:\ f(z) = 1 - \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^4 \pm \ldots$	(3p)

Megoldás: $|z| < 1$ esetén

$$\frac{z}{1+z} = \frac{z}{1-(-z)} = z(1 + (-z) + (-z)^2 + (-z)^3 + \ldots) = z - z^2 + z^3 - z^4 \pm \ldots,$$

$|z| > 1$ esetén

$$\frac{z}{1+z} = \frac{z}{z(1-(-1/z))} = 1 - \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^4 \pm \ldots.$$

5. Feladat. Adjuk meg az

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

komplex függvény reziduumának értékét a $z = -1$ pontban! Mekkora a függvény integrálja az origó közepű, 1.5 sugarú, pozitívan irányított körvonalra?

Reziduum: -14/25	(4p) Integrál értéke: $-28\pi i/25$	(2p)

Megoldás: A -1 másodrendű pólus, így a másodrendű pólusok reziduumára vonatkozó képlet szerint a reziduum -14/25 (a $(z^2 - 2z)/(z^2 + 4)$ függvény deriváltjába kell -1-et helyettesíteni). Mivel az adott körben csak a -1 izolált szingularitás található, így az integrál értéke egyszerűen adódik a reziduum-tételből: $-28\pi i/25$.

6. Feladat. Melyik függvény Laplace-transzformáltja az

$$F(s) = \frac{s+11}{(s-1)(s+3)}$$

függvény?

$f(t) = 3e^t - 2e^{-3t}$	(6p)

Megoldás: Először parciális törtekre bontjuk az $F(s)$ függvényt, majd a tagok inverz Laplace-transzformáltja már könnyen meghatározható.

$$F(s) = \frac{s+11}{(s-1)(s+3)} = \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s+3}.$$

7. Feladat. Oldjuk meg az $y' = xy - 4x$, $y(0) = 5$ kezdetiérték-feladatot!

$y(x) = e^{x^2/2} + 4$	(6p)

Megoldás: A differenciálegyenlet szétválasztható változójú, általános megoldása

$$y(x) = Ce^{x^2/2} + 4,$$

a C konstans pedig a kezdeti feltételből határozható meg.