Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, I. zárthelyi dolgozat, megoldások, 2012/13. II. félév

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 42 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 12 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen.

A dolgozathoz csak íróeszköz és üres A4-es papír használható. Számológép nem használható!

A feladatokban a vektorok koordinátái a szokásos Descartres-féle derékszögű koordinátarendszerben adottak $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

1. Feladat. Tekintsük az $\overline{\mathbf{r}}(u,v) = (u^2v, u+v, u-v)$, $u \in [0,2]$, $v \in [0,4]$ felületet! Adjuk meg a felület érintősíkjának egyenletét a felület $(2,3,-1)$ koordinátájú pontjában, ill. a ponton átmenő u-vonal (az a felületi görbe, amely átmegy az adott ponton, a paramétere u, v pedig konstans) görbületét!

Érintősík: $-2(x-2)+5(y-3)+3(z+1)=0$(3p)	Görbület: $\sqrt{32}/(\sqrt{18})^3$ (3p)

Megoldás: Az adott pont az $u=1$, $v=2$ paraméterválasztással adódik. Az érintősík normálvektora $\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v = (-2, u^2+2uv, 2uv-u^2)$, ami az adott pontban a (-2,5,3) vektort adja. Azért az érintősík egyenlete $-2(x-2)+5(y-3)+3(z+1)=0$.

Ha a $v=2$ értéket rögzítjük, akkor a paramétervonal egyenlete $\overline{\mathbf{r}}(u) = (2u^2, u+2, u-2)$. Ezen görbe görbületét kell kiszámolni az $u=1$ pontban. Erre $\kappa = \sqrt{32}/(\sqrt{18})^3$ adódik.

2. Feladat. Adjuk meg az $\overline{\mathbf{r}}(t) = ((t^2-2)\sin t + 2t\cos t, (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, 0)$ görbe ívhosszát a $t=0$ és $t=\pi$ paraméterű pontok között!

Ívhossz: $\pi^3/3$ (6p)

Megoldás: $|\dot{\overline{\mathbf{r}}}(t)| = t^2$, az ívhossz pedig $s = \int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = \pi^3/3$.

3. Feladat. Határozzuk meg a $\overline{\mathbf{v}} = (2xy, x^2+z^2, 2yz)$ konzervatív erőtér integrálját az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ csavarvonal $t=0$ és $t=2\pi$ paraméterű pontjai között!

Integrál: 0 (6p)

Megoldás: Mivel az erőtér konzervatív, így az integrál csak a kezdő- és végpontoktól függ ill. van az erőtérnek potenciálja. Így két lehetőségünk is van az integrál direkt kiszámítása helyett.

1) A csavarvonal helyett integrálhatunk egy egyszerűbb görbén is. Pl. az $\overline{\mathbf{r}}(t) = (1,0,t)$, $t \in [0,2\pi]$ egyenes szakasz mentén. Így az integrál

$$\int_0^{2\pi} (0, 1+t^2, 0)(0,0,1)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

2) Az erőtér potenciálja $\phi(x,y,z) = y(x^2+z^2)$, a kezdőpont $(1,0,0)$, a végpont $(1,0,2\pi)$, és az integrál $\phi(1,0,2\pi) - \phi(1,0,0) = 0$.

4. Feladat. Számítsuk ki az $\overline{\mathbf{r}}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$, $u \in [0,2]$, $v \in [0,2\pi]$ felület felszínét!

Felszín: $\pi(17^{3/2}-1)/6$ (6p)

Megoldás: $|\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v| = \sqrt{4u^4+u2} = u\sqrt{4u^2+1}$. Így a felszín

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{2\pi}{8}\int_0^2 8u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(4u^2+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = \pi(17^{3/2}-1)/6$$

5. Feladat. Számítsuk ki a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (xz, x^2y, y^2z)$ vektor-vektor függvény felületi integrálját annak az első térnyolcadban lévő testnek a teljes kifelé irányított zárt felületére, melyet az $x^2+y^2=1$ hengerfelület, a $z = x^2+y^2$ forgásparaboloid és a koordinátasíkok határolnak! (Alkalmazzuk a Gauss–Osztogradszkij-tételt!)

Felületi int.: $\pi/8$	(6p)

Megoldás: A divergenciát $(z + x^2 + y^2)$ kell integrálni a felületek által meghatározott tartományra. Ezt pl. hengerkoordinátákra áttérve tehetjük meg:

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{r^2} (z + r^2) r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r = \pi/8.$$

6. Feladat. Mekkora munkát végez a $\overline{\mathbf{v}}(x,y,z) = (y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2)$ erőtér a (0,0,0), (1,0,0), (1,1,1), (0,1,1), (0,0,0) pontok által meghatározott négyszögön a pontok sorrendje által meghatározott irányítás mellett? (Alkalmazzuk a Stokes-tételt!)

Munka: 0	(6p)

Megoldás: A felület paraméterezése $\overline{\mathbf{r}}(u,v) = (u,v,v)$, $u,v \in [0,1]$, továbbá $\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v = (0,-1,1)$, így az irányítás is megfelelő, hiszen ez a vektor a felületből felfelé mutat. Erre a felületre kell integrálni az erőtér $(2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)$ rotációját.

$$\int_0^1 \int_0^1 (0, 2v-2u, 2u-2v)(0,-1,1) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^1 (4u-4v) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = 0.$$

7. Feladat. Határozzuk meg a $v(x,y) = 2xy + y/2$ függvény harmonikus társait! Tegyük fel, hogy $v(x,y)$ egy reguláris $f(x+\mathtt{i}y)$ komplex függvény képzetes rész függvénye! Határozzuk meg $f(x+\mathtt{i}y)$ deriváltját!

$u(x,y) = x^2 - y^2 + x/2 + c$	(4p)	$f'(x+\mathtt{i}y) = 2x + 1/2 + \mathtt{i}2y$	(2p)