Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, I. zárthelyi dolgozat, megoldások, 2014/15. II. félév

1. Feladat. Adjuk meg az $\bar{\mathbf{r}}(t) = (2t^2, t, t^2/2)$ görbe (2,1,1/2) pontjához tartozó görbületét és simulókörének sugarát!

Görbület: $\sqrt{17}/\sqrt{18^3}$	(5p), sugár: $\sqrt{18^3}/\sqrt{17}$	(1p)

Megoldás: A $(2, 1, 1/2)$ pont a $t = 1$ paraméterértékhez tartozik. Így $\dot{\bar{\mathbf{r}}}(1) = (4, 1, 1)$, $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}(1) = (4, 0, 1)$, $\dot{\bar{\mathbf{r}}}(1) \times \ddot{\bar{\mathbf{r}}}(1) = (1, 0, -4)$. Tehát $|\dot{\bar{\mathbf{r}}}(1) \times \ddot{\bar{\mathbf{r}}}(1)| = \sqrt{17}$, $|\dot{\bar{\mathbf{r}}}(1)| = \sqrt{18}$. A görbület tehát

$$\kappa = \frac{|\dot{\bar{\mathbf{r}}}(1) \times \ddot{\bar{\mathbf{r}}}(1)|}{|\dot{\bar{\mathbf{r}}}(1)|^3} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18^3}}.$$

A simulókör sugara a görbület reciproka.

2. Feladat. Adjuk meg az $\bar{\mathbf{r}}(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, t^2)$ görbe ívhosszát a $t = 0$ és $t = \pi/2$ paraméterű pontok között!

Ívhossz: $\sqrt{5}\pi^2/8$	(6p)

Megoldás: Mivel $\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) = (t\cos t, t\sin t, 2t)$ és $|\dot{\bar{\mathbf{r}}}(t)| = \sqrt{5}t$, így az ívhosszt az alábbi integrállal számolhatjuk:

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{5}t \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{5}\pi^2}{8}.$$

3. Feladat. Határozzuk meg a $\bar{\mathbf{v}}(x, y, z) = (z^3 + 6xy^2, 6x^2y, 3xz^2)$ konzervatív erőtér $\phi(x, y, z)$ potenciálfüggvényét, a P(1,0,1) és Q(2,1,0) pontok között végzett munkáját és a divergenciáját!

$\phi(x, y, z) = xz^3 + 3x^2y^2 + c$	Munka$= 11$	$\mathrm{div}\bar{\mathbf{v}} = 6x^2 + 6y^2 + 6xz$	(2-2-2p)

Megoldás: Mivel $\phi'_x = z^3 + 6xy^2$, így ϕ csak $\phi = xz^3 + 3x^2y^2 + g(y, z)$ alakú lehet, ahol g valamilyen y-tól és z-től függő függvény. ϕ y és z szerinti deriváltjait összehasonlítva $\bar{\mathbf{v}}$ második és harmadik elemével azt kapjuk, hogy g csak konstans lehet. Így a keresett potenciálfüggvény $\phi(x, y, z) = xz^3 + 3x^2y^2 + c$ alakú.

Mivel konzervatív az erőtér, így a munkát a vég- és kezdőpontokbeli potenciálértékek különbsége adja:

$$\phi(2, 1, 0) - \phi(1, 0, 1) = 12 - 1 = 11$$

.

A divergencia az alábbi módon számolható: $\mathrm{div}\bar{\mathbf{v}}(x, y, z) = 6y^2 + 6x^2 + 6xz$.

4. Feladat. Számítsuk ki az $\bar{\mathbf{r}}(u, v) = (\sqrt{u}\cos v, \sqrt{u}\sin v, u)$, $u \in [0, 4]$, $v \in [0, 2\pi]$ felület felszínét, ill. adjuk meg a (-1,0,1) pontbeli érintősík egyenletét!

Felszín: $(4\pi/3)((17/4)^{3/2} - (1/4)^{3/2})$ (4p)	Síkegyenlet: $x + 1 + (1/2)(z - 1) = 0$(2p)

Megoldás: $\bar{\mathbf{r}}'_u \times \bar{\mathbf{r}}'_v = (-\sqrt{u}\cos v, -\sqrt{u}\sin v, 1/2)$. A felszínhez ennek a hosszát kell integrálni a paramétertartományon.

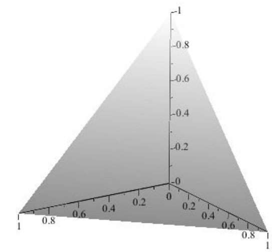
$$A = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \sqrt{u + 1/4}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u = 2\pi \left[\frac{(u + 1/4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \frac{4\pi}{3}((17/4)^{3/2} - (1/4)^{3/2}).$$

A $(-1, 0, 1)$ pont rajta lesz az érintősíkon. Ez a pont az $u = 1$, $v = \pi$ paraméterekhez tartozik. Így $\bar{\mathbf{r}}'_u(1, \pi) \times \bar{\mathbf{r}}'_v(1, \pi) = (1, 0, 1/2)$. Ez lesz a sík normálvektora. Így a sík egyenlete: $x + 1 + (1/2)(z - 1) = 0$.

5. Feladat. Számítsuk ki a $\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (3z, -4, y)$ vektor-vektor függvény fluxusát a $z = 1 - x - y$ sík első térnyolcadbeli részére (lásd ábra)! A felület felfelé van irányítva.

Fluxus: -4/3	(6p)

Megoldás: A felület paraméterezése $\overline{\mathbf{r}}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, ahol $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 1-u]$. Így $\overline{\mathbf{r}}'_u \times \overline{\mathbf{r}}'_v = (1, 1, 1)$, ami a felületből felfelé mutat, így valóban felfelé fogjuk számítani a fluxus. A fluxust tehát az alábbi integrál adja:



$$\Phi = \int_0^1 \int_0^{1-u} (1, 1, 1) \cdot (3(1 - u - v), -4, v) \, \mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} 3(1 - u - v) - 4 + v \, \mathrm{d}v\mathrm{d}u = -4/3.$$

6. Feladat. Ellenőrizzük a Stokes-tételt a
$\overline{\mathbf{v}}(x, y, z) = (-y + z, x - z, x - y)$ vektormező A felület peremére vett integráljára, ahol A egy origó közepű, 1 sugarú gömbfelület xy-sík feletti, felfelé irányított része! (Útmutató: Számoljuk ki külön-külön a tételben szereplő egyenlőség mindkét oldalán álló integrált!)

Az integrálok értéke: 2π	(3-3p)

Megoldás: A peremgörbe egy egységnyi sugarú kör, melynek paraméterezése $\overline{\mathbf{r}}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tehát a vonalintegrál

$$\oint_G \overline{\mathbf{v}} \, \mathrm{d}\overline{\mathbf{r}} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0)(-\sin t, \cos t, \cos t - \sin t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

A gömbfelület paraméterezése $\overline{\mathbf{r}}(u, v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$. Így a felületi integrál

$$\iint_A \mathrm{rot}\overline{\mathbf{v}} \, \mathrm{d}\overline{\mathbf{A}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (0, 0, 2) \cdot (-\sin^2 v \cos u, -\sin^2 v \sin u, -\sin v \cos v) \, \mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} -2 \sin v \cos v \, \mathrm{d}v\mathrm{d}u = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2v) \, \mathrm{d}v\mathrm{d}u = 2\pi.$$

7. Feladat. Adjuk meg a $z = 3 + 3\mathtt{i}$ komplex szám logaritmusának és $\mathtt{i}$-edik hatványának főértékét algebrai alakban!

$\mathrm{Ln}z = \ln(\sqrt{18}) + \mathtt{i}\pi/4$ (3p), $z^{\mathtt{i}} = e^{-\pi/4} \cos(\ln(\sqrt{18})) + \mathtt{i}e^{-\pi/4} \sin(\ln(\sqrt{18}))$	(3p)

Megoldás: Csak a főértékekkel számolunk.
Az első rész abból következik, hogy a komplex szám hossza $\sqrt{18}$ és szöge $\pi/4$.
A második részhez:

$$(3 + 3\mathtt{i})^{\mathtt{i}} = e^{(\ln(\sqrt{18}) + \mathtt{i}\pi/4))\mathtt{i}} = e^{-\pi/4}(\cos(\ln(\sqrt{18})) + \mathtt{i} \sin(\ln(\sqrt{18})))$$

$$= e^{-\pi/4} \cos(\ln(\sqrt{18})) + \mathtt{i}e^{-\pi/4} \sin(\ln(\sqrt{18}))$$