

**Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, 2014/15. II. félév**

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 42 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 12 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen. A dolgozathoz csak íróeszköz és üres A4-es papír használható. Számológép nem használható!

1. FELADAT. Hol deriválható és hol reguláris az  $f(z) = 1 + z^2 + z\bar{z}$  komplex függvény?

Deriválható:	(4p), reguláris	(2p)
--------------	-----------------	------

2. FELADAT. A  $v(x, y) = e^{-y}(3 \cos x + 2 \sin x) - 5y$  függvény egy  $f$  reguláris komplex függvény képzetes rész függvénye. Adjuk meg a lehetséges  $u(x, y)$  valós rész függvényeket ill. az  $f'(i)$  értéket!

$u(x, y) =$	(4p), $f'(i) =$	(2p)
-------------	-----------------	------

3. FELADAT. Adjuk meg az  $f(z) = 1/(z - 1)$  komplex függvény integrálját a  $z_0 = 1$  pont körüli, 1 sugarú, valós tengely feletti félkörvonalra a 2 ponttól a 0 pontig! Határozzuk meg az integrál értékét a teljes körvonalra pozitív irányítással!

Integrál a félkörre:	(4p), integrál a teljes körre:	(2p)
----------------------	--------------------------------	------

4. FELADAT. Fejtsük Laurent-sorba az  $f(z) = 1/(z^2 + 1)$  komplex függvényt a  $|z| < 1$  körlapon és a  $|z| > 1$  körgyűrűben!

$ z  < 1 : f(z) =$	(3p)
--------------------	------

$ z  > 1 : f(z) =$	(3p)
--------------------	------

5. FELADAT. Adjuk meg az

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z - 6)}$$

komplex függvény reziduumainak értékét a szinguláris pontokban! Adjuk meg ezek segítségével a függvény integrálját a  $z_0 = 0$  középpű, 1 sugarú, pozitívan irányított körvonalra!

Szingularitás, reziduum:	(3p), integrál értéke:	(3p)
--------------------------	------------------------	------

6. FELADAT. Melyik függvény Laplace-transzformáltja az  $F(s)$  függvény?

$$F(s) = \frac{4s + 10}{s^2 + 6s + 8}$$

$f(t) =$	(6p)
----------	------

7. FELADAT. Oldjuk meg az  $(x^2 - 4)y' = x(1 - 2y)$ ,  $y(\sqrt{5}) = 1$  kezdetiérték-feladatot!

$y(x) =$	(6p)
----------	------