Név: ....NEPTUN kód...........Gyak. vez.: ....

Matematika A3#, II. zárthelyi dolgozat, megoldások, 2014/15. II. félév

Minden feladat 6 pontot ér, így összesen 42 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 12 pont szükséges. Egy feladatra csak az egyes rubrikákban szereplő maximális pontszám vagy nulla pont szerezhető. Maximális pont akkor jár, ha jó a feladat megoldási menete és a végeredmény is szerepel a neki szánt helyen. A dolgozathoz csak íróeszköz és üres A4-es papír használható. Számológép nem használható!

1. Feladat. Hol deriválható és hol reguláris az $f(z) = 1 + z^2 + z\bar{z}$ komplex függvény?

Deriválható: 0+0i	(4p), reguláris: sehol sem	(2p)

Megoldás:

$$f(z) = f(x+iy) = 1 + 2x^2 + 2xyi,$$

így a Cauchy–Riemann-egyenletek: $4x = 2x$, $0 = -2y$, melyek csak $x = y = 0$ esetén teljesülnek.

2. Feladat. A $v(x,y) = e^{-y}(3\cos x + 2\sin x) - 5y$ függvény egy f reguláris komplex függvény képzetes rész függvénye. Adjuk meg a lehetséges $u(x,y)$ valós rész függvényeket ill. az $f'(i)$ értéket!

$u(x,y) = e^{-y}(2\cos x - 3\sin x) - 5x + konst.$	(4p), $f'(i) = -3e^{-1} - 5 + i(2e^{-1})$	(2p)

Megoldás: A Cauchy–Riemann-egyenletekből u x- és y-szerinti deriváltja meghatározható, melyekből megkapjuk u-t.

$$f'(i) = f'(0+1i) = v'_y(0,1) - iv'_x(0,1) = -3e^{-1} - 5 + i(2e^{-1}).$$

3. Feladat. Adjuk meg az $f(z) = 1/(z-1)$ komplex függvény integrálját a $z_0 = 1$ pont körüli, 1 sugarú, valós tengely feletti félkörvonalra a 2 ponttól a 0 pontig! Határozzuk meg az integrál értékét a teljes körvonalra pozitív irányítással!

Integrál a félkörre: $i\pi$	(4p), integrál a teljes körre: $2\pi i$	(2p)

Megoldás: A görbe paraméterezése: $\gamma(t) = 1 + \cos t + i\sin t = 1 + e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

$$\int_G \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi i\,\mathrm{d}t = i\pi.$$

A másik feladatrészben a $[0, 2\pi]$ intervallumon kell integrálni. Így jön ki a $2\pi i$ eredmény.

4. Feladat. Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = 1/(z^2+1)$ komplex függvényt a $|z| < 1$ körlapon és a $|z| > 1$ körgyűrűben!

$\lvert z\rvert < 1:\ f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k$	(3p)
$\lvert z\rvert > 1:\ f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2(k+1)}}$	(3p)

Megoldás: $|z| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

$|z| > 1$ esetén

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2(1-(-1/z^2))} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2(k+1)}}.$$

5. Feladat. Adjuk meg az

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-6)}$$

komplex függvény reziduumainak értékét a szinguláris pontokban! Adjuk meg ezek segítségével a függvény integrálját a $z_0 = 0$ közepű, 1 sugarú, pozitívan irányított körvonalra!

Szingularitás, reziduum: 0-ban -1/6, 6-ban 37/6 (3p), integrál értéke: $-\pi i/3$ (3p)

Megoldás: A $z_0 = 0$ és a $z_0 = 6$ pontok szingularitások, mindkettő elsőrendű pólus. A reziduumok úgy kaphatók meg, hogy a

$$\frac{z^2+1}{2z-6}$$

törtbe helyettesítjük a z_0 értékeket. (A számláló $f(z)$ számlálója, a nevező pedig $f(z)$ nevezőjének deriváltja.) Így 0-ban $-1/6$, 6-ban $37/6$ a reziduum.

Az integrált a Reziduum-tétellel érdemes számolni. Mivel a szingularitások közül csak a 0 esik a kör belsejébe, így az integrál az ottani reziduum $2\pi i$-szerese, azaz $-\pi i/3$.

6. Feladat. Melyik függvény Laplace-transzformáltja az $F(s)$ függvény?

$$F(s) = \frac{4s+10}{s^2+6s+8}$$

$f(t) = e^{-2t} + 3e^{-4t},\ t \geq 0$ (6p)

Megoldás: Parciális törtekre bontunk és alkalmazzuk a transzformációs szabályokat.

$$F(s) = \frac{4s+10}{s^2+6s+8} = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+4}.$$

Ez az $f(t) = e^{-2t} + 3e^{-4t}$ függvény Laplace-transzformáltja.

7. Feladat. Oldjuk meg az $(x^2-4)y' = x(1-2y)$, $y(\sqrt{5}) = 1$ kezdetiérték-feladatot!

$y(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2-4}\right)$ (6p)

Megoldás: Szétválasztható változójú egyenletről van szó. Osztunk $(1-2y)$-nal és (x^2-4). Így elvesztjük az $y = 1/2$ megoldást.

Mindkét oldalt integráljuk x-szerint

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2y| = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + \ln c,\ c > 0.$$

Innét

$$|1-2y| = \frac{1}{c^2|x^2-4|},$$

azaz

$$|1-2y| = \frac{c_1}{|x^2-4|},\ c_1 = 1/c^2 > 0.$$

Elhagyjuk az abszolút értéket, és c_1-et kicseréljük egy olyan konstansra, ami már negatív is lehet

$$1-2y = \frac{c_2}{x^2-4},\ c_2 \neq 0.$$

Kifejezzük y-t

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(1 - c_2\frac{1}{x^2-4}\right).$$

Itt ha megengedjük, hogy a konstans lehet nulla is, akkor már az elvesztett megoldást is tartalmazza a képlet. Így kapjuk az általános megoldást

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(1 - c_3 \frac{1}{x^2 - 4}\right), \; c_3 \in \mathbb{R}.$$

A kezdeti feltételből azt kapjuk, hogy $c_3 = -1$, így a kezdetiérték-feladat keresett megoldása

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2 - 4}\right).$$