

Fritz Józsefné, Kónya Ilona,  
Pataki Gergely és Tasnádi Tamás

# MATEMATIKA 1.

2011.

Ismertető  
Tartalomjegyzék  
Pályázati támogatás  
Gondozó

Szakmai vezető  
Lektor  
Technikai szerkesztő  
Copyright

A „Matematika 1.” elektronikus oktatási segédanyag a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatika Karán a mérnök-informatikus szakos hallgatók „Analízis 1” tárgyához készült, de haszonnal forgathatják más szakok, karok vagy műszaki főiskolák, egyetemek hallgatói is, akik hasonló mélységben hasonló anyagot tanulnak matematikából.

Az anyag numerikus sorok, sorozatok elméletét, egyváltozós valós függvények határértékét, folytonosságát, differenciálását és integrálását tárgyalja. A definíciók, tételek, bizonyítások mellett kiemelt szerepet kapnak a példák, és a gyakran előforduló feladattípusok megoldásai.

A mintegy 260 oldalas elméleti anyagot kiegészíti egy több, mint 100 oldalas példatár, amely többségében megoldott, tematizált gyakorlófeladatokat tartalmaz. A két pdf állomány kölcsönösen hivatkozik egymásra. Az eligazodást tartalomjegyzék, valamint az elméleti anyagban található tárgymutató segíti. A megértést színes ábrák könnyítik, az érdeklődő olvasó pedig a *Thomas Calculus* illetve a *Calculusapplets* kapcsolódó weboldalaira is ellátogathat külső hivatkozásokon keresztül. A háttérszínezéssel tagolt elméleti anyag fekete-fehér változata is rendelkezésre áll, amely nyomtatásra javasolt formátum.

**Kulcsszavak:** sor, sorozat, folytonosság, kalkulus, differenciálás, integrálás.

*Támogatás:*

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

*Készült:*

A BME TTK Matematikai Intézet gondozásában.

*Szakmai felelős vezető:*

Ferenczi Miklós

*Lektorálta:*

Pröhle Péter

*Az elektronikus kiadást előkészítette:*

Győri Sándor<sup>1</sup>, Fritz Ágnes, Kónya Ilona, Pataki Gergely, Tasnádi Tamás

*Címlap grafikai terve:*

Csépány Gergely László, Tóth Norbert

ISBN 978-963-279-445-7

*Copyright:* Fritz Ágnes (BME), Kónya Ilona (BME), Pataki Gergely (BME), Tasnádi Tamás (BME)

„A © terminusai: A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjeleníthető és előadható, de nem módosítható.”

---

<sup>1</sup>Korábbi változatot szerkesztette.



# Tartalomjegyzék

<b>Tartalomjegyzék</b>	<b>1</b>
<b>1. Valós számsorozatok</b>	<b>5</b>
1.1. Bevezető	5
1.1.1. A valós számok ( $\mathbb{R}$ ) axiómái	5
1.1.2. A rendezési axiómákból levezethető	7
1.1.3. Néhány fogalom	7
1.2. Számsorozatok és határérték	8
1.2.1. Számsorozat konvergenciája	9
1.2.2. Számsorozat divergenciája	11
1.3. További tételek a határértékről (1)	12
1.3.1. A határérték egyértelműsége	12
1.3.2. A konvergencia szükséges feltétele	12
1.4. Határérték és műveletek	13
1.4.1. Műveletek konvergens számsorozatokkal	13
1.4.2. Néhány jól használható egyszerűbb tétel	19
1.4.3. Feladatok	20
1.5. További tételek a határértékről (2)	22
1.6. Néhány példa az előző tételek alkalmazására	24
1.7. Monoton sorozatok	27
1.7.1. Példák rekurzív sorozatokra	28
1.8. Egy kitüntetett számsorozat	31
1.8.1. Néhány $e$ -vel kapcsolatos példa	33
1.8.2. Feladatok	35
1.9. További tételek a határértékről (3)	36
1.10. Sorozat torlódási pontjai	39
<b>2. Valós számsorok</b>	<b>43</b>
2.1. Numerikus sorok konvergenciája	43
2.1.1. Geometriai (mértani) sor	45
2.1.2. Konvergens sorok összege és konstansszorososa	47
2.1.3. A konvergencia szükséges feltétele	50
2.2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok	51

2.2.1.	Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz	53
2.3.	Sorok abszolút és feltételes konvergenciája	54
2.4.	Pozitív tagú sorok	55
2.5.	Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok	57
2.5.1.	Majoráns kritérium	57
2.5.2.	Minoráns kritérium	58
2.5.3.	Hányados kritérium	61
2.5.4.	Gyökkritérium	64
2.5.5.	Integrálkritérium	68
2.5.6.	Hibabecslés pozitív tagú sorok esetén	70
2.6.	Műveletek konvergens sorokkal	73
2.6.1.	Végtelen sorok természetes szorzata	74
2.6.2.	Végtelen sorok Cauchy-szorzata	75
2.6.3.	Zárójelek elhelyezése, illetve elhagyása végtelen sor esetén	76
2.6.4.	Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)	77
2.7.	Feladatok sorokhoz	77
2.8.	Számsorozatok nagyságrendje	80
2.8.1.	Műveletek $\Theta$ -val	81
2.8.2.	Aszimptotikus egyenlőség ( $a_n \sim b_n$ )	82
<b>3.</b>	<b>Függvények határértéke és folytonossága</b>	<b>88</b>
3.1.	Függvény határértéke	88
3.1.1.	Szükséges és elégséges tétel határérték létezésére	94
3.1.2.	Végesben vett határértékek	96
3.1.3.	Végtelenben vett határértékek	97
3.1.4.	Feladatok	98
3.2.	Folytonosság	99
3.2.1.	Szakadási helyek osztályozása	99
3.3.	Műveletek függvények körében	100
3.4.	Racionális függvények	103
3.4.1.	Polinomok (racionális egészfüggvények)	103
3.4.2.	Racionális törtfüggvény	105
3.5.	Példák és feladatok	105
3.6.	Egy nevezetes határérték	107
3.7.	Folytonos függvények tulajdonságai	110
3.7.1.	Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai	111
3.7.2.	Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai	113
3.7.3.	Egyenletes folytonosság	115
<b>4.</b>	<b>Függvények differenciálása</b>	<b>119</b>
4.1.	Differenciálszámítás	119
4.1.1.	Differenciál, érintő egyenes	122
4.1.2.	Differenciálási szabályok	123

4.1.3.	Magasabbrendű deriváltak . . . . .	126
4.1.4.	Inverz függvény . . . . .	127
4.2.	Elemi függvények . . . . .	130
4.2.1.	Hatványfüggvények . . . . .	130
4.2.2.	Exponenciális függvények . . . . .	134
4.2.3.	Logaritmusfüggvények . . . . .	135
4.2.4.	Exponenciális hatványfüggvények . . . . .	137
4.2.5.	Trigonometrikus függvények és inverzeik . . . . .	138
4.2.6.	Hiperbolikus függvények és inverzeik . . . . .	149
4.2.7.	Néhány összetett példa . . . . .	157
4.3.	A differenciálszámítás középértéktételei . . . . .	162
4.3.1.	Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére . . . . .	162
4.3.2.	A differenciálszámítás középértéktételei . . . . .	163
4.3.3.	Feladatok . . . . .	165
4.4.	L'Hospital-szabály . . . . .	166
4.5.	Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai . . . . .	169
4.6.	Differenciálható függvények lokális tulajdonságai . . . . .	174
4.7.	Implicit megadású függvények deriválása . . . . .	181
4.8.	Egyenes aszimptota $\pm\infty$ -ben . . . . .	184
4.9.	Függvényvizsgálat . . . . .	184
4.9.1.	Folytonos függvények zárt intervallumbeli szélsőértékei . . . . .	185
4.10.	Paraméteres megadású görbék . . . . .	189
4.10.1.	Görbék megadása síkbeli polárkoordinátákkal . . . . .	193
4.11.	Feladatok . . . . .	194
4.12.	Néhány kidolgozott feladat . . . . .	200
<b>5.</b>	<b>Függvények integrálása</b> . . . . .	<b>206</b>
5.1.	Primitív függvény, határozatlan integrál . . . . .	206
5.1.1.	Példák . . . . .	208
5.2.	Határozott integrál . . . . .	212
5.2.1.	Jelölések, definíciók . . . . .	212
5.3.	A Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei . . . . .	215
5.4.	Elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra . . . . .	217
5.5.	Newton–Leibniz-tétel . . . . .	219
5.6.	A Riemann-integrál tulajdonságai . . . . .	221
5.7.	Az integrálszámítás középértéktétele . . . . .	223
5.7.1.	Feladatok . . . . .	225
5.8.	Integrálfüggvény . . . . .	226
5.8.1.	Példák . . . . .	228
5.8.2.	Feladatok . . . . .	230
5.9.	Integrálás helyettesítéssel . . . . .	231
5.10.	Integrálási módszerek . . . . .	232
5.10.1.	sin és cos szorzata . . . . .	232

5.10.2. sin és cos páratlan kitevőjű hatványai . . . . .	232
5.10.3. sin és cos páros kitevőjű hatványai . . . . .	233
5.10.4. sin és cos hatványainak szorzata . . . . .	233
5.10.5. Parciális integrálás . . . . .	234
5.10.6. Racionális törtfüggvények integrálása . . . . .	236
5.10.7. Integrálás helyettesítéssel . . . . .	238
5.11. Improprius integrál . . . . .	242
5.11.1. Definíciók . . . . .	242
5.11.2. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ improprius integráljai . . . . .	245
5.11.3. Az improprius integrálok néhány tulajdonsága . . . . .	247
5.11.4. Feladatok . . . . .	249
5.12. Az integrálszámítás alkalmazása . . . . .	251
5.12.1. Terület . . . . .	251
5.12.2. Szektorterület . . . . .	252
5.12.3. Forgástest térfogata . . . . .	252
5.12.4. Forgástest felszíne . . . . .	253
5.12.5. Ívhosszúság . . . . .	254
<b>Tárgymutató</b>	<b>255</b>



# 1. fejezet

## Valós számsorozatok

### 1.1. Bevezető

Thom<sub>1</sub>  
⇒

#### 1.1.1. A valós számok ( $\mathbb{R}$ ) axiómái

##### Algebrai axiómák

$\mathbb{R}$ -ben értelmezett két művelet:  $+$  és  $\cdot$

Ezek a műveletek nem vezetnek ki az adott halmazból,  $\mathbb{R}$ -ből, tehát  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ -re:  
 $a + b \in \mathbb{R}$  és  $a \cdot b \in \mathbb{R}$ .

##### $+$ művelet tulajdonságai (1–4.)

1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ -re (az összeadás *asszociatív*).

2. Létezik egyetlen szám (ezt 0-val jelöljük), amelyre teljesül, hogy

$$0 + a = a + 0 = a, \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}.$$

3. Minden  $a \in \mathbb{R}$  számhoz létezik pontosan egy olyan  $x \in \mathbb{R}$ , amelyre

$$x + a = a + x = 0.$$

Az így értelmezett  $x$ -et  $(-a)$ -val jelöljük. (Neve: additív inverz.)

4.  $a + b = b + a$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ -re (az összeadás *kommutatív*)

##### $\cdot$ művelet tulajdonságai (5–8.)

5.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  (a szorzás *asszociatív*)

---

<sup>1</sup>lásd Thomas 01-es bemutató 1. fejezet (3-10. oldal).

6. Létezik egyetlen szám, amelyet 1-gyel jelölünk ( $1 \neq 0$ ), amelyre teljesül, hogy

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}$$

7. Minden  $a \neq 0$ -hoz létezik egyetlen  $x \in \mathbb{R}$ , amelyre

$$x \cdot a = a \cdot x = 1$$

Az így értelmezett  $x$ -et az  $a \neq 0$  szám reciprokának nevezzük, és  $\frac{1}{a}$ -val jelöljük.

8.  $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$  (a szorzás *kommutatív*)

**A két műveletre (+ és  $\cdot$ )-ra együttesen érvényes tulajdonság (9.)**

9.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$  (*disztributivitás*)

**Rendezési axiómák (10–13.)**

10. Tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$  számpárra az

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b$$

relációk közül pontosan egy teljesül (trichotom tulajdonság).

11. Ha  $a < b$  és  $b < c$  (röviden  $a < b < c$ ), akkor  $a < c$ , ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ) (tranzitivitás)

12. Ha  $a < b$ , akkor  $a + c < b + c$ , ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ) (a rendezés *monoton*).

13. Ha  $a < b$  és  $c > 0$ , akkor  $a \cdot c < b \cdot c$ , ( $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ).

**Archimédész-féle axióma (14.)**

14. Tetszőleges  $b > 0$  számhoz található  $b$ -nél nagyobb  $n$  természetes szám.

**Cantor-féle axióma (15.)**

15. Ha minden  $n \in \mathbb{N}$  számnak megfeleltetünk egy  $I_n = \{x : a_n \leq x \leq b_n, x \in \mathbb{R}\}$  halmazt (röviden  $[a_n, b_n]$  zárt intervallumot) oly módon, hogy

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leq b_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

Vagyis: egymásba skatulyázott *zárt* intervallumsorozat elemeinek metszete nem üres. ( $\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \xi \in \mathbb{R}$ )

Ⓜ Zártság fontos! ( $I_n = (0, \frac{1}{n}]$  esetén  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ )

### 1.1.2. A rendezési axiómákból levezethető

A rendezésre vonatkozóan könnyű belátni, hogy igazak az alábbi állítások (szokás ezeket az „egyenlőtlenségekkel való számolás szabályai”-nak is nevezni):

1. Minden  $a \in \mathbb{R}$  számra az

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

tulajdonságok közül pontosan egy teljesül. ( $a > 0 \iff (-a) < 0$ )

2.  $(a < b) \wedge (c < d) \implies a + c < b + d$   
 Speciálisan:  $(a > 0) \wedge (b > 0) \implies a + b > 0$

3.  $(0 \leq a < b) \wedge (0 \leq c < d) \implies ac < bd$   
 Speciálisan:  $(a > 0) \wedge (b > 0) \implies ab > 0$

4.  $(a < b) \wedge (c < 0) \implies ac > bc$   
 Speciálisan:  $a < b \implies -a > -b$

5.  $0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$   
 $a < b < 0 \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$   
 $a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$a < b \implies$

$ab > 0 : \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$   
 $ab < 0 : \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

6.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  esetén

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{és}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

7. Ha  $n$  pozitív egész szám, és  $0 < a < b$ , akkor  $a^n < b^n$ .

Hasonlóan következnek az abszolútérték tulajdonságai.

### 1.1.3. Néhány fogalom

$$H \subset \mathbb{R}$$

ⓓ  $H$  felülről korlátos, ha  $\exists k_f \in \mathbb{R}$ , hogy  $\forall x \in H : x \leq k_f$ . ( $k_f$ : felső korlát)

Ⓓ  $H$  alulról korlátos, ha  $\exists k_a \in \mathbb{R}$ , hogy  $\forall x \in H : k_a \leq x$ . ( $k_a$ : alsó korlát)

Ⓓ  $H$  korlátos, ha felülről is és alulról is korlátos, tehát  $\exists k : |x| \leq k$ .

Ⓓ A felülről korlátos  $H$  halmaz legkisebb felső korlátját szuprémumnak (felső határnak) nevezzük.

Jele:  $\sup H$ .

Ⓓ Az alulról korlátos  $H$  halmaz legnagyobb alsó korlátját infimumnak (alsó határnak) nevezzük.

Jele:  $\inf H$ .

Ⓓ  $H = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+\} = \{0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\}$  esetén:

**Megoldás.** Felső korlátok például:  $1, 3, \pi, \dots$

Alsó korlátok például:  $0, -2, -56, \dots$

$\sup H = 1$  (nincs a halmazban legnagyobb elem),  $\inf H = 0$  (= legkisebb elem)

Dedekind folytonossági tétel:

Ⓓ *Felülről korlátos nem üres számhalmaznak mindig van szuprémuma. ( $\neg B$ )*

Ebből következik:

Ⓓ *Alulról korlátos nem üres számhalmaznak mindig van infimuma.*

Ⓓ A fenti axiómarendszerben a Cantor-féle és az Archimédész-féle axióma lecserélhető ezzel az állítással.

•••

## 1.2. Számsorozatok és határérték

Thom<sub>2</sub>

⇒

App

⇒

A valós számsorozat a természetes számokon értelmezett valós értékű függvény:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

az  $n$  helyen felvett értéke  $f(n) = a_n, n = 1, 2, \dots$

<sup>2</sup>lásd Thomas 11-es bemutató 1. fejezet (3-20. oldal).

A számsorozat jelölése:

$$(a_n), \text{ vagy } \langle a_n \rangle, \text{ vagy } a_n, n = 1, 2, \dots .$$

Ⓓ  $(a_n)$  felülről korlátos, ha  $\exists k_f: \forall n$ -re:  $a_n \leq k_f$ .

Ⓓ  $(a_n)$  alulról korlátos, ha  $\exists k_a: \forall n$ -re:  $k_a \leq a_n$ .

Ⓓ  $(a_n)$  korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos, tehát  $\exists k$ :  
 $|a_n| \leq k \quad (k = \max\{|k_a|, |k_f|\})$ .

Vagyis a fenti definíciók szerint ilyenkor  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény értékkészlete korlátos.

### 1.2.1. Számsorozat konvergenciája

Ⓓ Azt mondjuk, hogy  $(a_n)$  konvergens és határértéke (limesze)  $A \in \mathbb{R}$ , jelben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz ( $\varepsilon \in \mathbb{R}$ )  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

$N(\varepsilon)$  neve: küszöbindex, küszöbszám

Ⓜ A definícióval ekvivalens:

$\forall \varepsilon > 0$ -ra az  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  intervallumon kívül a sorozatnak véges sok eleme van.  
 (Az intervallumon belül pedig végtelen sok eleme van.)

•••

*Az alábbi példánál a definíció segítségével bizonyítsuk be, hogy a megadott  $A$  a számsorozat határértéke!*

Ⓟ.

$A = 0$ , ha

a)  $a_n = \frac{1}{n}$

b)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

**Megoldás.** Mindkét esetben:

$$|a_n - A| = \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \implies N(\varepsilon) \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

Például  $\varepsilon = 0,001$  esetén  $N = 1000$  választás megfelelő.

$$\text{Pl.} \quad a_n = \frac{6+n}{5,1-n}, \quad A = -1$$

**Megoldás.**

$$|a_n - A| = \left| \frac{6+n}{5,1-n} - (-1) \right| = \left| \frac{11,1}{5,1-n} \right| \underset{n>5}{=} \frac{11,1}{n-5,1} < \varepsilon \implies n > 5,1 + \frac{11,1}{\varepsilon}$$

$$\text{Ezért} \quad N(\varepsilon) \geq \left[ 5,1 + \frac{11,1}{\varepsilon} \right].$$

$$\text{Pl.} \quad a_n = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8}, \quad A = 0$$

$$\text{Megoldás.} \quad |a_n - A| = \left| \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} \right| = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} < \varepsilon$$

Ezt az egyenlőtlenséget nem tudjuk megoldani  $n$ -re. Azonban nem szükséges a lehető legkisebb küszöbindex előállítása. Elegendő megmutatnunk, hogy létezik küszöbindex. Ezért a megoldáshoz felhasználhatjuk az egyenlőtlenségek tranzitív tulajdonságát, például az alábbi módon:

$$|a_n - A| = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} < \frac{n^2 - 0}{2n^5 + 0 + 0} = \frac{1}{2n^3} < \varepsilon \implies n > \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

$$\text{Ezért} \quad N(\varepsilon) \geq \left[ \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon}} \right].$$

$$\text{Pl.} \quad a_n = \frac{8n^4 + 3n + 20}{2n^4 - n^2 + 5}, \quad A = 4$$

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} |a_n - A| &= \left| \frac{8n^4 + 3n + 20}{2n^4 - n^2 + 5} - 4 \right| = \left| \frac{4n^2 + 3n}{2n^4 - n^2 + 5} \right| = \\ &= \frac{4n^2 + 3n}{2n^4 - n^2 + 5} < \frac{4n^2 + 3n^2}{2n^4 - n^4 + 0} = \frac{7}{n^2} < \varepsilon \implies \frac{7}{\varepsilon} < n^2 \end{aligned}$$

$$\text{Innen} \quad N(\varepsilon) \geq \left[ \sqrt{\frac{7}{\varepsilon}} \right].$$

### 1.2.2. Számsorozat divergenciája

A nem konvergens számsorozatokat divergens számsorozatnak nevezzük.

Például:  $a_n = (-1)^n$  divergens.

Ugyanis a sorozat elemei:  $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

Határértékként csak a  $-1$  vagy az  $1$  jöhetne szóba. De például  $\varepsilon = 1$  választással kiderül, hogy egyik sem lehet a határérték, mert bár pl. a  $-1$  pont  $1$  sugarú környezete végtelen sok elemet tartalmaz (az  $a_{2n-1}$  elemeket), de rajta kívül is végtelen sok van (az  $a_{2n}$  elemek). Így nem található hozzá  $N(\varepsilon)$ , tehát  $-1$  nem lehet a határérték. Ugyanígy belátható, hogy  $1$  sem jöhet szóba határértékként. Tehát a sorozat nem konvergens, így divergens.

A divergens sorozatoknak két fontos speciális esete a  $+\infty$ -hez és a  $-\infty$ -hez divergáló számsorozat.

A megfelelő definíciók:

$$\textcircled{D} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

ha  $\forall P > 0$ -hoz ( $P \in \mathbb{R}$ )  $\exists N(P) \in \mathbb{N}$ , hogy

$$a_n > P, \quad \text{ha } n > N(P)$$

$$\textcircled{D} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

ha  $\forall M < 0$ -hoz ( $M \in \mathbb{R}$ )  $\exists N(M) \in \mathbb{N}$ , hogy

$$a_n < M, \quad \text{ha } n > N(M)$$

Ez a definíció megfogalmazható  $M > 0$  feltétellel is:

$$\forall M > 0\text{-hoz } \exists N(M) \in \mathbb{N} : a_n < -M, \text{ ha } n > N(M)$$

Gy  
→

$$\textcircled{Pl.} \quad a_n = 2n^3 + 3n + 5 \quad \text{Bizonyítsa be, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty!$$

Megoldás.

$$a_n = 2n^3 + 3n + 5 > 2n^3 > P \implies n > \sqrt[3]{\frac{P}{2}} \implies N(P) \geq \left\lceil \sqrt[3]{\frac{P}{2}} \right\rceil$$

**Pl.**  $a_n = \frac{6 - n^2}{2 + n}$  Bizonyítsa be, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty!$

**Megoldás.** Teljesítendő, hogy  $a_n = \frac{6 - n^2}{2 + n} < M$  ( $< 0$ ), ha  $n > N(M)$ .

Ez egyenértékű a következő feltétellel:

$(-a_n =) \frac{n^2 - 6}{2 + n} > -M$  ( $> 0$ ), ha  $n > N(M)$ . A feladatot egyszerűsítjük, hiszen most sem a legkisebb küszöbindexet keressük:

$$\frac{n^2 - 6}{2 + n} \underset{n \geq 4 \text{ esetén } \frac{n^2}{2} > 6}{>} \frac{n^2 - \frac{n^2}{2}}{2n + n} = \frac{n}{6} > -M \implies n > -6M$$

Ezért  $N(M) \geq \max\{4, [-6M]\}$ .

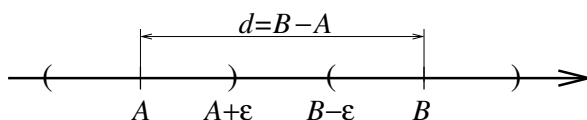
### 1.3. További tételek a határértékről (1)

#### 1.3.1. A határérték egyértelmősége

**T** Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$ , akkor  $A = B$ .

**B** Indirekt módon bizonyítunk<sup>3</sup>. Tehát feltesszük, hogy  $A \neq B$ , például  $A < B$ .

Legyen  $d = B - A > 0$  és  $\varepsilon = \frac{d}{3} > 0!$



A számsorozat konvergenciája miatt létezik  $N_1(\varepsilon)$  és  $N_2(\varepsilon)$ , hogy

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_1(\varepsilon),$$

$$B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_2(\varepsilon).$$

De ekkor  $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$  esetén:

$$a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < a_n$$

Ez pedig ellentmondás, tehát nem igaz, hogy  $A \neq B$ , vagyis  $A = B$ . ■

#### 1.3.2. A konvergencia szükséges feltétele

$P \implies Q$ , a P állításból következik a Q állítás. Ezt kétféleképpen is megfogalmazhatjuk:



1. P elégséges feltétele Q-nak,
2. Q szükséges feltétele P-nek. (Hiszen, ha Q nem teljesül, akkor már P nem teljesülhet, mert P teljesüléséből már következne Q teljesülése.)

**(T)**  $(a_n)$  konvergens  $\implies (a_n)$  korlátos  
(Tehát a korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.)

**(B)**  $\forall \varepsilon > 0$ -ra  $\exists N(\varepsilon)$ :

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) = N$$

Tehát  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ -on kívül legfeljebb csak az  $a_1, a_2, \dots, a_N$  elemek eshetnek.

$$\begin{array}{c} a_2 \qquad \qquad \qquad a_1 \\ \times \quad ( \times | \times ) \quad \times \\ \hline A - \varepsilon \quad A \quad A + \varepsilon \end{array}$$

$$\implies \begin{cases} \exists k_a : \forall n\text{-re } k_a \leq a_n & k_a = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N, A - \varepsilon\} \\ \exists k_f : \forall n\text{-re } a_n \leq k_f & k_f = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, A + \varepsilon\}. \end{cases}$$

Így  $\exists K : |a_n| \leq K$ , tehát korlátos. ■

**(M)**  $\Leftarrow$  nem igaz. (Az állítás nem megfordítható.)

Példa:  $a_n = (-1)^n$  korlátos, de nem konvergens.

**(Pl.)** Konvergens-e az alábbi sorozat:  $a_n = \begin{cases} 2n + 1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{1}{3n^2 + 1}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$

**Megoldás.** Nem konvergens, mert nem korlátos. ( $a_{2m} = 2 \cdot 2m + 1 = 4m + 1 \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}$ -re ellentmond az Archimédész-féle axiómának.)

## 1.4. Határérték és műveletek

### 1.4.1. Műveletek konvergens számsorozatokkal

**(T<sub>1</sub>)**  $(a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies (a_n + b_n \rightarrow A + B)$

**(B)** Tehát be kell látni, hogy

$$c_n = a_n + b_n \rightarrow C = A + B,$$

azaz  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , hogy

$$|c_n - C| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

Legyen  $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}$ ! Az  $a_n$  és  $b_n$  számsorozatok konvergenciája miatt

$\exists N_1(\varepsilon^*) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge N_2(\varepsilon^*) = N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ , hogy

$$\left. \begin{array}{l} |a_n - A| < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1(\varepsilon^*) \\ \text{és } |b_n - B| < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2(\varepsilon^*) \end{array} \right\} \implies \text{Ha } n > \max\{N_1(\varepsilon^*), N_2(\varepsilon^*)\},$$

akkor

$$\begin{aligned} |c_n - C| &= |(a_n + b_n) - (A + B)| = \\ &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon^* + \varepsilon^* = 2\varepsilon^* = \varepsilon \end{aligned}$$

Tehát a keresett  $N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$  ■

**(M)** A bizonyításnál felhasználtuk a háromszög egyenlőtlenséget. ( $|a + b| \leq |a| + |b|$ )

**(T<sub>2</sub>)**  $(a_n \rightarrow A) \implies (c a_n \rightarrow c A)$

**(B)** (i)  $c = 0$  esetén az állítás triviálisan igaz.

(ii)  $c \neq 0$  esetén:

Legyen  $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{|c|}$ !

$a_n$  konvergenciája miatt  $\exists N_1(\varepsilon^*) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)$ , hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon^* \quad \forall n > N_1(\varepsilon^*)$$

$$\implies |c a_n - c A| = |c(a_n - A)| = |c| |a_n - A| < |c| \varepsilon^* = |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

$$\forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) = N(\varepsilon) \quad \blacksquare$$

**(M)** A bizonyításnál felhasználtuk, hogy  $|a b| = |a| |b|$ .

**(K)** (i)  $(a_n \rightarrow A) \implies (-a_n \rightarrow -A)$  (Most  $c = -1$ )

$$(ii) (a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies a_n - b_n = a_n + (-b_n) \rightarrow A + (-B) = A - B$$

( $T_1, T_2$ -ből következik)

**T<sub>3</sub>**

$$(i) (a_n \rightarrow 0) \wedge (b_n \rightarrow 0) \implies a_n b_n \rightarrow 0$$

$$(ii) (a_n \rightarrow A) \wedge (b_n \rightarrow B) \implies a_n b_n \rightarrow AB$$

**B** (i)  $\exists N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  és  $N_2(2)$ , hogy

$$\left. \begin{array}{l} |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = N_1 \\ |b_n - 0| < 2 \quad \forall n > N_2(2) = N_2 \quad (\varepsilon = 2 \text{ most}) \end{array} \right\} \implies$$

Ha  $n > \max\{N_1, N_2\}$ , akkor  $|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$ .

(ii) Mivel a  $c_n \equiv A \forall n$ -re (stagnáló sorozat)  $\rightarrow A$ , ezért

$$(a_n - A \rightarrow A - A = 0) \wedge (b_n - B \rightarrow B - B = 0).$$

$T_3$  (i)-et alkalmazva kapjuk:  $(a_n - A) \cdot (b_n - B) \rightarrow 0$ , vagyis

$$a_n b_n - Ab_n - Ba_n + AB \rightarrow 0.$$

Ekkor

$$a_n b_n = \underbrace{(a_n b_n - Ab_n - Ba_n + AB)}_{\downarrow 0} + \underbrace{(Ab_n + Ba_n - AB)}_{\downarrow AB + AB - AB} \rightarrow AB$$

■

**M** Nyilván három konvergens sorozat szorzata az egyes határértékek szorzatához konvergál. Teljes indukcióval belátható, hogy véges sok konvergens sorozat szorzata is az egyes sorozatok határértékének szorzatához konvergál. Hasonlóan általánosítható  $T_2$  véges sok konvergens sorozat összegére.

Pl.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} = 1^{10} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = 1^k = 1 \quad (k \in \mathbb{N}^+ \text{ adott konstans, független } n\text{-től})$$

De vigyázat!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq 1^n = 1$$

Az utolsó példában alkalmazott módszer ún. „letakarás” lenne. Eddig megismert tételeinkben nem véletlenül nem volt erről szó, mert alkalmazása rossz eredményhez vezethet. Később látni fogjuk, hogy a 3. sorozat határértéke a matematikában jól ismert  $e \neq 1$  szám.

$$\text{T}_3^* \quad (a_n \rightarrow 0) \wedge (b_n \text{ korlátos}) \implies a_n b_n \rightarrow 0$$

ⓑ A feltételek miatt:

$\forall \varepsilon^* > 0$ -hoz  $\exists N_a(\varepsilon^*) : |a_n - A| < \varepsilon^*$ , ha  $n > N_a(\varepsilon^*)$ ,  
 másrészt  $|b_n| \leq K$ .

Ekkor

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| \leq |a_n| K < \varepsilon^* K = \varepsilon$$

Tehát  $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{K}$  választás mellett az  $a_n$  sorozathoz megtalált küszöbindex megfelel az  $a_n b_n$  sorozathoz keresett küszöbindexnek.

Így  $N(\varepsilon) = N_a\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$  választással

$$|a_n b_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \blacksquare$$

$$\text{T}_4 \quad (a_n \rightarrow A) \implies (|a_n| \rightarrow |A|)$$

ⓑ  $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$ , ha  $n > N(\varepsilon)$ . ■

Ⓜ  $(|a_n|)$  konvergenciájából általában nem következik  $(a_n)$  konvergenciája.  
 (Pl.  $a_n = (-1)^n$  divergens, de  $|a_n| = 1^n = 1 \rightarrow 1$ ).

Speciálisan azonban igaz:  $|a_n| \rightarrow 0 \implies a_n \rightarrow 0$ .

Ugyanis

$$||a_n| - 0| = |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

**T<sub>5</sub>**

$$(i) (b_n \rightarrow B \neq 0) \implies \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B}$$

$$(ii) (b_n \rightarrow B \neq 0) \wedge (a_n \rightarrow A) \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$$

**B** (i) Mivel T<sub>4</sub> szerint  $|b_n| \rightarrow |B|$ , ezért  $\exists N_1 \left( \frac{|B|}{2} \right) = N_1$ , hogy

$$||b_n| - |B|| < \frac{|B|}{2}, \quad \text{ha } n > N_1$$

azaz

$$|B| - \frac{|B|}{2} < |b_n| < |B| + \frac{|B|}{2}, \quad \text{ha } n > N_1$$

vagyis

$$|b_n| > \frac{|B|}{2}, \quad \forall n > N_1.$$

Másrészt  $\forall \varepsilon > 0$  esetén  $\exists N_2 \left( \frac{\varepsilon}{2} |B|^2 \right) = N_2(\varepsilon^*)$ , hogy

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} |B|^2 = \varepsilon^* \quad \forall n > N_2(\varepsilon^*).$$

Így ha  $n > N(\varepsilon) := \max \{N_1, N_2\}$ , akkor:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} \right| = \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot |b_n|} < \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} < \frac{\varepsilon^*}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = < \frac{\frac{\varepsilon}{2} |B|^2}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = \varepsilon$$

(ii)  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$  T<sub>3</sub> és T<sub>5</sub> (i) miatt. ■

Néhány példa az előző tételek alkalmazására

**Pl.**

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{500}{n^2} \rightarrow \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{500 \text{ db}} = 0$$

**Megoldás.** A tagok száma 500 ( $n$ -től független!), ezért  $T_1$  véges sokszori alkalmazásával a 0 eredmény helyesnek adódik.

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}} \rightarrow 0 + \dots + 0 = 0 \quad \text{HIBÁS gondolatmenet!!!}$$

**Megoldás.** Hiszen

$$b_1 = \frac{1}{1^2}, \quad b_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2}, \quad b_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2}, \quad b_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^2}, \dots$$

Így a tagok száma itt függ  $n$ -től, ez nem véges sok sorozat összege, így a  $T_1$  tétel erre már nem terjeszthető ki. A helyes megoldás:

$$b_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{(1+n) \cdot \frac{n}{2}}{n^2} = \frac{1+n}{2n} = \frac{\frac{1}{n} + 1}{2} \rightarrow \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \frac{8n^2 - n + 3}{n^2 + 9}} = \underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} \frac{8 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^2}} \rightarrow \frac{8 - 0 + 0}{1 + 0} = 8$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \left(\frac{2n+1}{3-n}\right)^3 \frac{3n^2+2n}{2+6n^2}}$$

**Megoldás.**

$$a_n = \underbrace{\left(\frac{2n}{-n}\right)^3}_{=-8} \left(\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{n}}\right)^3 \underbrace{\frac{3n^2}{6n^2}}_{=\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{2}{3n}}{1 + \frac{1}{3n^2}} \rightarrow -8 \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -4$$

$\textcircled{\text{M}}$  A hatványozásnál a szorzatra vonatkozó tételt alkalmaztuk.

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{a_n = \underbrace{\frac{n^2 - 5}{2n^3 + 6n}}_{b_n} \underbrace{\sin(n^4 + 5n + 8)}_{c_n}} \rightarrow 0.$$

Megoldás. Hiszen  $b_n = \underbrace{\frac{n^2}{2n^3}}_{=\frac{1}{2n} \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0$  és  $c_n$  korlátos.

•••

### 1.4.2. Néhány jól használható egyszerűbb tétel

$$\textcircled{\text{T}} \quad (a_n \geq 0) \wedge (a_n \rightarrow A \geq 0) \implies (\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{A})$$

$$\textcircled{\text{B}} \quad \begin{array}{l} \text{(i) } A = 0 \text{ esete:} \\ |\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \varepsilon, \\ \text{ha } n > N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^2) \end{array} \iff \begin{cases} 0 \leq |a_n - 0| = a_n < \varepsilon^2, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon^2) \\ (a_n \rightarrow 0 \text{ miatt } \exists N_a(\varepsilon^2)) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{(ii) } A > 0 \text{ esete:} \\ a_n \rightarrow A \text{ miatt } \exists N_a(\varepsilon \sqrt{A}) = N_a(\varepsilon^*): \\ |a_n - A| < \varepsilon \cdot \sqrt{A} = \varepsilon^*, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon \sqrt{A}) \\ \text{De ekkor} \end{array}$$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = \left| \frac{a_n - A}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \leq \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon,$$

$$\text{tehát } N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^*) \quad \blacksquare$$

$$\textcircled{\text{M}} \quad a_n \geq 0, a_n \rightarrow A \implies \sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{A} \text{ tetszőleges rögzített } k \in \mathbb{N}^+ \text{ esetén.}$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 1} - \sqrt{4n^2 + n + 3} \quad (\infty - \infty \text{ alakú})$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4n^2 + 5n - 1 - (4n^2 + n + 3)}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + \sqrt{4n^2 + n + 3}} = \\ &= \frac{4n - 4}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1} + \sqrt{4n^2 + n + 3}} = \\ &= \frac{4n}{\sqrt{4n^2}} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4n} - \frac{1}{4n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{3}{4n^2}}} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = 1 \\ &= \frac{4n}{2n} = 2 \end{aligned}$$

Gy  
→

## 1.4.3. Feladatok

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{3n^2 + 8}} = ?$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 + 3}) = ?$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 4}) = ?$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n^4 + n^3 - 2n^2 + 8}}{\sqrt[3]{n^6 + 5n^2 + 3}} = ?$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 4n^2 - n} - \sqrt{n^4 - n^2 - n + 1}) = ?$

•••

$$\textcircled{\text{T}} \quad (a_n \rightarrow \infty) \implies \left( \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \right)$$

$\textcircled{\text{B}}$  Tudjuk, hogy  $\exists N_a(P)$  :

$$a_n > P > 0, \text{ ha } n > N_a(P). \quad \blacksquare$$

Tehát  $\frac{1}{P} > \frac{1}{a_n} > 0$ , ha  $n > N_a(P)$ .  $P = \frac{1}{\varepsilon}$  választással kapjuk, hogy

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \text{ ha } n > N_a(P).$$

Vagyis

$$\left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon) = N_a(P).$$

( $a_n > 0$  feltehető, hiszen csak véges sok negatív elem lehet. Ezek elhagyhatók.)

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad (a_n \rightarrow 0) \stackrel{?}{\implies} \left( \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty \right)$$

**Megoldás.** Nem következik!

Például

$$a_n = \frac{-2}{n} \text{ esetén } \frac{1}{a_n} = -\frac{n}{2} \rightarrow -\infty$$



Vagy például

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{a_n} = (-1)^n n^2 := b_n$$

$$b_{2m} \rightarrow \infty, \quad b_{2m+1} \rightarrow -\infty. \quad \text{Tehát} \quad \frac{1}{a_n} \not\rightarrow \infty.$$

De igaz:

$$\left( (a_n > 0) \wedge (a_n \rightarrow 0) \right) \implies \left( \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty \right)$$

$$\left( (a_n < 0) \wedge (a_n \rightarrow 0) \right) \implies \left( \frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty \right)$$

Ezt röviden így fogjuk jelölni az indoklásoknál:  $\frac{1}{0+} \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{0-} \rightarrow -\infty$

$$\textcircled{\mathbf{T}} \quad (a_n \rightarrow 0) \implies \left( \frac{1}{|a_n|} \rightarrow \infty \right)$$

$\textcircled{\mathbf{B}}$  Tudjuk, hogy  $\exists N_a(\varepsilon)$ :

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_a(\varepsilon).$$

$$\text{Vagyis } \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = P, \quad \text{ha } n > N_a(\varepsilon) = N(P). \quad \blacksquare$$

...

További hasonló tételek bizonyíthatók:

$$\text{Pl. } \frac{0}{\infty} \rightarrow 0 \quad (\text{Jelentése: } a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty \quad \text{esetén} \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0)$$

$$\left( \text{sőt } \frac{\text{korlátos}}{\infty} \rightarrow 0; \right) \quad \frac{\infty}{+0} \rightarrow \infty; \quad \infty + \infty \rightarrow \infty; \quad \infty \cdot \infty \rightarrow \infty$$

(Felhasználhatóak bizonyítás nélkül.)

Határozatlan alakok:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 1^\infty; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

Ilyen esetekben azonos átalakítással próbálkozunk, ill. később kapunk egy segédeszközt (L'Hospital-szabály).

## 1.5. További tételek a határértékről (2)

A limesz monoton:

$$\textcircled{T} \quad (a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}^+) \implies (A \leq B, \text{ tehát } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$$

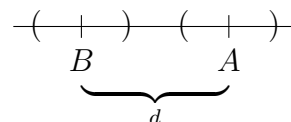
$\textcircled{M}_1$  Példa  $A = B$  esetére:

$$a_n = \underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\downarrow 1 = A} < b_n = \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\downarrow 1 = B}$$

$\textcircled{M}_2$   $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, a_n \leq b_n$  esetén is igaz az állítás.

$\textcircled{M}_3$   $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, a_n \leq b_n$ , ha  $n > N_1$  ( $\exists$  ilyen  $N_1$ ) feltétel is elég.

$\textcircled{B}$  Megmutatjuk, hogy  $A > B$  nem lehet, így a trichotom tulajdonság miatt  $A \leq B$ .



Ha  $A > B$  lenne, akkor pl.  $\varepsilon := \frac{d}{3} = \frac{A - B}{3} > 0$ -hoz a számsorozat konvergenciája miatt  $\exists N_a, N_b$ :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n > N_a(\varepsilon)\text{-ra } |a_n - A| < \varepsilon \\ \forall n > N_b(\varepsilon)\text{-ra } |b_n - B| < \varepsilon \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} a_n > b_n, \text{ ha } n > \max\{N_a, N_b\} \\ \text{Ez pedig a feltétel miatt nem lehetséges.} \end{array}$$

■

**Rendőrelv:**

$\textcircled{T}$

$$\left( \begin{array}{l} a_n \rightarrow A \\ b_n \rightarrow A \end{array} \text{ és } \begin{array}{l} a_n \leq c_n \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right) \implies (c_n \rightarrow A)$$

Ⓜ A tétel állítása most is igaz marad, ha a  $\forall n \in \mathbb{N}$  feltétel helyett a gyengébb  $\forall n > N_1$  ( $\exists$  ilyen  $N_1$ ) feltételt használjuk.

ⓑ A feltételek miatt:

Ha  $n > N_a(\varepsilon)$  :  $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$  és  $A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$ , ha  $n > N_b(\varepsilon)$ .

$N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$ .

Ha  $n > N(\varepsilon)$ , akkor az előzőek miatt:

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon.$$

Tehát, ha  $n > N(\varepsilon)$

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon \implies |c_n - A| < \varepsilon.$$

Vagyis  $c_n \rightarrow A$ , ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

**Speciális rendőrelv:**

Ⓣ

$$(i) (a_n \geq b_n) \wedge (b_n \rightarrow \infty) \implies a_n \rightarrow \infty$$

$$(ii) (a_n \leq b_n) \wedge (b_n \rightarrow -\infty) \implies a_n \rightarrow -\infty$$

ⓑ ( $\neg B$ ) ■

...

Néhány nevezetes számsorozat

[Gy](#)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{oszcillálón divergens egyébként.} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0, \text{ ha } |a| < 1 \text{ és } k \in \mathbb{N}^+ \quad (\neg B)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1, \text{ ha } p > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (\neg B)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} = \infty.$$

## 1.6. Néhány példa az előző tételek alkalmazására

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \frac{3n^5 + n^2 - n}{n^3 + 3} > \frac{3n^5 + 0 - n^5}{n^3 + 3n^3} = \frac{n^2}{2} \rightarrow \infty \implies a_n \rightarrow \infty$$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{n^5}{n^3} \cdot \underbrace{\frac{3 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{3}}_{c_n} > n^2 \cdot 2 \rightarrow \infty \implies a_n \rightarrow \infty$$

Felhasználtuk, hogy

$$c_n \rightarrow 3 \implies \exists N_0 : 2 < c_n (< 4), \text{ ha } n > N_0$$

$\textcircled{\text{M}}$  Persze belátható lenne, hogy  $b_n \rightarrow \infty$ ,  $c_n \rightarrow C > 0$  esetén  $b_n c_n \rightarrow \infty$ . Mi azonban ezt nem bizonyítottuk be, ezért nem használhatjuk fel a megoldásnál.

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \frac{1}{n^4 + 3} \cos(n^7 - 5) \quad ? \rightarrow 0,$$

Megoldás.

$$\underbrace{\frac{1}{n^4 + 3} \cdot (-1)}_{\downarrow 0} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{n^4 + 3} \cdot 1}_{\downarrow 0} \implies a_n \rightarrow 0. \quad \text{a rendőrelv miatt}$$

Másik megoldás: egy nullsorozat és egy korlátos sorozat szorzatáról van szó, így egy korábbi tétel miatt a szorzat is nullsorozat.

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \frac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}} \rightarrow ?$$

$$\text{Megoldás.} \quad \frac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}} = \frac{9^n}{4^n} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \left(\frac{9}{4}\right)^n \rightarrow \infty \cdot \underbrace{\frac{1}{\rightarrow 1}}$$

Tehát  $+\infty$  határértéket várunk, ezért a **speciális rendőrelvet** használjuk:

$$a_n > \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot 1} \rightarrow \infty \\ \implies a_n \rightarrow \infty.$$

Pl.  $a_n = \frac{2^{2n} + (-3)^{n-1}}{5^{n+2} + 7^{n+1}} \rightarrow ?$

Megoldás. 
$$\begin{aligned} \frac{2^{2n} + (-3)^{n-1}}{5^{n+2} + 7^{n+1}} &= \frac{4^n - \frac{1}{3} \cdot (-3)^n}{25 \cdot 5^n + 7 \cdot 7^n} = \\ &= \frac{4^n}{7^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^n}{25 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 7} \rightarrow 0 \cdot \frac{1-0}{0+7} = 0 \\ &= \left(\frac{4}{7}\right)^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Pl.  $a_n = \frac{n^2 + 9^{n+1}}{2n^5 + 3^{2n-1}} \rightarrow ?$

Megoldás. 
$$\frac{n^2 + 9^{n+1}}{2n^5 + 3^{2n-1}} = \frac{n^2 \left(\frac{1}{9}\right)^n + 9}{2n^5 \left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{3}} \frac{9^n}{9^n} \rightarrow \frac{0+9}{0+\frac{1}{3}} = 27$$

Felhasználtuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0$ , ha  $|a| < 1$ . (Most  $a = \frac{1}{9}$ .)

Pl. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+100}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Megoldás.  $a_n \rightarrow \underbrace{0+0+\dots+0}_{100 \text{ darab}} = 0$

A  $(b_n)$  sorozatnál már nem alkalmazható az előbbi módszer, mivel az egyes tagok ugyan nullához tartanak, de a tagok száma végtelenhez tart ( $\infty \cdot 0$  alakú). A [rendőrelv](#) segítségével tudjuk megoldani a feladatot.

$$\frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = n \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < b_n < n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$\implies b_n \rightarrow 1.$$

**Pl.** Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})!$

**Megoldás.** Ha  $a = 0$ : triviálisan igaz.

Ha  $0 < a < 1$ :  $\frac{0}{\infty}$  alakú, ezért 0-hoz tart a sorozat.

Ha  $a = 1$ :  $\frac{1}{n!} \rightarrow 0$ .

Ha  $a > 1$ :  $n > [a]$  esetén

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]} \cdot \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^{[a]}}{[a]!} \cdot \frac{a}{n} = \frac{\text{konstans}}{n}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$$\implies \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Ha  $a < 0$ :

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{(-1)^n |a|^n}{n!} = \underbrace{(-1)^n}_{\text{korlátos}} \underbrace{\frac{|a|^n}{n!}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

**Pl.**  $a_n = \sqrt[3n]{3n} \rightarrow ?$

**Megoldás.**  $\sqrt[3n]{3n} = \frac{\sqrt[3n]{3n}}{\sqrt[3n]{3}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$

Ugyanis az  $\sqrt[n]{n}$  és az  $\sqrt[n]{p}$  ( $p = 3$ ) részsorozatairól van szó.

Másik megoldás:  $a_n = \sqrt[3n]{3n} = \sqrt[3]{\sqrt[n]{3n}} \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1$

**Pl.**  $a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^5 + 5n}{8n^2 - 2}} \rightarrow ?$ ,

**Megoldás.**

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{4}}}_{1 \cdot 1^3 = 1} \cdot (\sqrt[n]{n})^3 = \sqrt[n]{\frac{2n^5}{8n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^5 + 5n}{8n^2 - 2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^5 + 5n^5}{8n^2 - 2n^2}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{7}{6}}}_{1 \cdot 1^3 = 1} \cdot (\sqrt[n]{n})^3$$

$$\implies a_n \rightarrow 1.$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n + 5^n}{2^n + 4^n}} \rightarrow ?$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}_{\downarrow \frac{5}{4}} \frac{5}{4} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} < \sqrt[n]{\frac{3^n + 5^n}{2^n + 4^n}} < \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow \frac{5}{4}} \frac{5}{4}$$

$$\implies a_n \rightarrow \frac{5}{4}.$$

...

## 1.7. Monoton sorozatok

**Elégséges tétel** ( $a_n$ ) konvergenciájára:

- $\textcircled{\text{T}}$  (i) Ha  $(a_n)$  monoton növekedő és felülről korlátos, akkor konvergens.  
(ii) Ha  $(a_n)$  monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

A két esetet összevonva a tétel így is kimondható :  
Ha  $(a_n)$  monoton és korlátos, akkor konvergens.

$\textcircled{\text{B}}$  Monoton növekedő esetre:

Felveszünk egy  $I_n = [c_n, d_n]$  egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatot, ahol

$c_n$ : mindig a számsorozat egy eleme és

$d_n$ : mindig felső korlát.

Így az  $(a_n)$  sorozat elemei véges sok elem kivételével a  $[c_n, d_n]$ -ben vannak. A Cantor-axióma szerint az  $I_n$  intervallumok metszete nem üres. Választunk a metszetből egy elemet, erről belátjuk, hogy a számsorozat határértéke. Mivel a határérték egyértelmű, azt is beláttuk, hogy ebben a speciális intervallumsorozatban egyetlen közös elem van, mert az intervallumok hossza 0-hoz tart.

Részletesen:

$$a_1 \leq a_n \leq K \quad \exists K \text{ (a korlátosság miatt)}$$

$$I_0 = [c_0, d_0] := [a_1, K]$$

$$F_1 := \frac{c_0 + d_0}{2}$$

$$\begin{array}{c} F_1 \\ \hline c_0 = a_1 \qquad K = d_0 \end{array}$$

Ha  $F_1$  felső korlát, akkor  $c_1 = c_0$ ,  $d_1 = F_1$ ,  $I_1 = [c_1, d_1] := [c_0, F_1]$

Ha  $F_1$  nem felső korlát:  $\exists a_{n_1} > F_1$  és ekkor  $c_1 = a_{n_1}$ ,  $d_1 = d_0$ ,  $I_1 = [c_1, d_1] := [a_{n_1}, d_0]$

$$F_2 := \frac{c_1 + d_1}{2}$$

Ha  $F_2$  felső korlát:  $I_2 = [c_2, d_2] := [c_1, F_2]$

Ha  $F_2$  nem felső korlát:  $\exists a_{n_2} > F_2$  és ekkor  $I_2 := [a_{n_2}, d_1]$ .

Stb.

$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$  (Cantor-axióma), tehát  $\exists l \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ .

Belátjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ .

$$\frac{\begin{array}{ccc} c_m & & d_m \\ | & & | \\ l - \varepsilon & & l + \varepsilon \end{array}}{l}$$

$I_n$  hossza:  $d_n - c_n \leq \frac{K - a_1}{2^n} < \varepsilon$ , ha  $n > N(\varepsilon)$ . Az előzőek miatt

$$0 < l - c_n \leq d_n - c_n < \varepsilon \quad \text{és} \quad 0 < d_n - l \leq d_n - c_n < \varepsilon, \quad \text{vagyis} \\ l - \varepsilon < c_n \leq d_n < l + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon).$$

Mivel  $c_m = a_{n_m}$  és  $(a_n) \nearrow$ :

$$c_m = a_{n_m} \leq a_n, \quad \text{ha} \quad n > n_m \quad \text{és} \quad a_n \leq d_m \quad (\text{felső korlát}) \quad \forall n \quad \implies$$

$$l - \varepsilon < c_m = a_{n_m} \leq a_n \leq d_m < l + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_m = N(\varepsilon)$$

Tehát valóban  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ . ■

...

Gy

### 1.7.1. Példák rekurzív sorozatokra

A rekurzív megadású számsorozatok konvergenciája sok esetben vizsgálható az előző elégséges tétel alkalmazásával. Erre mutatunk most néhány példát.

**(Pl.)**  $a_1 = \frac{4}{3}; \quad a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}; \quad n = 1, 2, \dots$

Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

**Megoldás.**  $a_1 = 1,33 > a_2 = \frac{3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} = 1,194 > a_3 = 1,1067$

Sejtés:  $(a_n) \searrow$ , tehát  $a_n > a_{n+1} > 0$ .

Bizonyítás: teljes indukcióval.



1.  $a_1 > a_2 > a_3 > 0$  teljesül

2. Tfh.  $a_{n-1} > a_n > 0$

3. Igaz-e:

$$\frac{3 + a_{n-1}^2}{4} = a_n \stackrel{?}{>} a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}$$

2. miatt  $a_{n-1} > a_n \geq \frac{3}{4} > 0$

$$\implies a_{n-1}^2 > a_n^2 \implies 3 + a_{n-1}^2 > 3 + a_n^2$$

$$\implies \frac{3 + a_{n-1}^2}{4} = a_n > a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}$$

Tehát a számsorozat monoton csökkenő és alulról korlátos (hiszen  $a_n > 0$ )

$\implies (a_n)$  konvergens, és fennáll:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + a_{n-1}^2}{4}$$

$$A = \frac{3 + A^2}{4} \implies A^2 - 4A + 3 = 0 \implies A = 1 \text{ vagy } A = 3.$$

$A = 3$  nem lehet, mivel  $a_n < a_1 = \frac{4}{3}$ , ezért  $a_n$  nem esik a 3 szám pl. 1 sugarú környezetébe. Így  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

Pl.

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

**Megoldás.**  $(a_n) = (1, 2,646, 2,94, \dots)$

$\sqrt{6 + a_n} \geq 0$  miatt a sorozat elemei pozitívak ((ii)-ben precízen megmutatjuk).

(i) Ha a sorozat konvergens lenne, akkor létezne

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 + a_{n-1}} = \sqrt{6 + A}, \text{ vagyis } A^2 - A - 6 = 0.$$

Ebből  $A = 3$  vagy  $A = -2$  lehetne.  $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}} > 0$  miatt  $A = -2$  nem lehet. Így csak az  $A = 3$  jöhet szóba.

(ii) Sejtés:  $(a_n) \nearrow$ .

Bizonyítás: teljes indukcióval. (Egyidejűleg belátjuk, hogy  $a_n > 0$ .)

$0 < a_1 < a_2 < a_3$  igaz.

Tegyük fel, hogy  $0 < a_{n-1} < a_n$ .

Igaz-e, hogy

$$0 \stackrel{?}{<} \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

Az indukciós feltevés miatt  $0 < a_{n-1} < a_n$

$$\implies 0 < 0 + 6 < 6 + a_{n-1} < 6 + a_n \quad (a_n > 0 \text{ miatt})$$

$$\implies 0 < \sqrt{6 + a_{n-1}} < \sqrt{6 + a_n}$$

Vagyis  $0 < a_n < a_{n+1}$ .

Tehát a sorozat monoton növekedő és elemei értelmezettek és pozitívak.

(iii) Létezik-e  $K$  felső korlát?  $K$ -nak most célszerű  $A$ -t választani. Teljes indukcióval belátjuk, hogy  $a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ :

$a_1 < 3$  teljesül. Tegyük fel, hogy  $a_n < 3$ . Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Tehát  $(a_n)$  felülről korlátos (felső korlátja 3).

(iv) Vagyis  $(a_n) \nearrow \wedge (a_n)$  felülről korlátos  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

Láttuk, hogy  $A = 3$  lehet csak.

**(M)** A monotonitás másképpen is belátható:

$$0 < a_n \stackrel{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

$$a_n^2 \stackrel{?}{<} 6 + a_n$$

$$a_n^2 - a_n - 6 \stackrel{?}{<} 0$$

Ez igaz, ha  $-2 < a_n < 3$ , de ezt még be kell bizonyítani.  $-2 < a_n$  triviálisan igaz ( $a_n > 0$  miatt),  $a_n < 3$  pedig teljes indukcióval bizonyítandó.

**(Pl.)**  $a_1 = -3; \quad a_{n+1} = \frac{5 - 6a_n^2}{13}; \quad n = 1, 2, \dots$

Konvergens-e a sorozat?

**Megoldás.** Monoton csökkenő-e?

$$a_{n+1} = \frac{5 - 6a_n^2}{13} \stackrel{?}{<} a_n, \text{ amiből } 6a_n^2 + 13a_n - 5 \stackrel{?}{>} 0.$$

$$\left(6x^2 + 13x - 5 = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

Tehát monoton csökkenő, ha  $a_n < -\frac{5}{2}$ , vagy  $a_n > \frac{1}{3}$ .

Most teljes indukcióval belátható, hogy  $a_n \leq -3$  ( $< -\frac{5}{2}$ ) (HF.)

Tehát a sorozat monoton csökkenő a  $-3$  kezdőértékkel.

Ha a sorozat alulról korlátos lenne, akkor konvergens lenne, és a határértéke:

$$A = \frac{5 - 6A^2}{13} \implies A = -\frac{5}{2} \text{ vagy } A = \frac{1}{3} \text{ lehetne.}$$

Mivel most  $a_n \leq -3 \quad \forall n$ -re  $\implies (a_n)$  nem konvergens, vagyis alulról nem korlátos

$\implies \forall M$ -hez  $\exists n_0$ , hogy  $a_{n_0} < M$ .

Mivel  $(a_n) \searrow$ , ezért  $a_n < a_{n_0} < M$ , ha  $n > n_0$ , tehát  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

## 1.8. Egy kitüntetett számsorozat

Ⓓ  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  korlátos és  $\nearrow \implies (e_n)$  konvergens.

Ⓑ 1. Korlátosság (a binomiális tétel felhasználásával):

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} \frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left( \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{0 < \cdots < 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{0 < \cdots < 1} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{0 < \cdots < 1} \right) < \\ &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} := s_n \end{aligned}$$

De  $(s_n)$  felülről korlátos, mert

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} < \\ &< 1 + 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3 \end{aligned}$$

Tehát  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3$ .

2.  $(e_n)$  monoton nő:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left( \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \right) = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left( \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)}_{> 1 - \frac{1}{n}} \right) + \binom{n+1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > \\ &> 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) + 0 = e_n \end{aligned}$$

Tehát  $e_{n+1} > e_n$ . ■

Mivel  $(e_n) \nearrow$  és korlátos  $\implies$  konvergens.

A sorozat határértékét  $e$ -vel jelöljük.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A fentiek miatt:  $2 < e < 3$ .

Belátható (mi nem bizonyítjuk), hogy  $e$  nem racionális szám, továbbá:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

### 1.8.1. Néhány $e$ -vel kapcsolatos példa

Gy  
→

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3 + n + 6}\right)^{n^3 + n + 6} \rightarrow e, \text{ ugyanis } (e_n) \text{ egy részsorozatáról van szó.}$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^{n-6} \left(1 + \frac{1}{n-6}\right)^6 \rightarrow e \cdot 1^6 = e$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^{6n-7} = \left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^{6n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{6n+1}\right)^8} \rightarrow e \cdot \frac{1}{1^8} = e$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{Pl.}} \quad a_n &= \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n-2} = \left(\frac{n+4-1}{n+4}\right)^{n+4-6} = \\ &= \left(1 + \frac{-1}{n+4}\right)^{n+4} \frac{1}{\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^6} \rightarrow e^{-1} \cdot \frac{1}{1^6} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\left( \text{Felhasználtuk, hogy } \frac{n+4}{n+3} = \frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1 \right)$$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^2 \rightarrow \frac{e^3}{e^4} \cdot 1^2 = \frac{1}{e}$$

$$\text{Pl. } a_n = \frac{\left(\frac{n^2-2}{n^2+3}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{\left(1 + \frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \rightarrow \frac{e^{-2}}{e^3} = e^{-5}$$

$$\text{Pl. } a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n+6}\right)^{2n}}{\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{6}{n}}\right)^n} = \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^n}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{e^1}{e^6}\right)^2 = e^{-10}$$

$$\text{Pl. } a_n = \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+9}\right)^{2n}}{\left(1 + \frac{9}{2n}\right)^{2n}} = \frac{\left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n}}{\left(1 + \frac{9}{2n}\right)^{2n}} \rightarrow \frac{e^2}{e^9} = e^{-7}$$

$$\text{Pl. } a_n = \frac{\left(\frac{2n^2+5}{2n^2+3}\right)^{4n^2}}{\rightarrow ?}$$

**Megoldás.** Két átalakítással is megoldjuk.

1. megoldás:

$$a_n = \frac{\left(\frac{\left(1 + \frac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1 + \frac{3}{2n^2}\right)^{2n^2}}\right)^2}{\rightarrow \left(\frac{e^5}{e^3}\right)^2 = e^4}$$

2. megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{5 \cdot 2}{4n^2}\right)^{4n^2}}{\left(1 + \frac{3 \cdot 2}{4n^2}\right)^{4n^2}} \rightarrow \frac{e^{10}}{e^6} = e^4$$

**Pl.** Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n^2}, \quad b_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{9n^2},$$

$$c_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n^3}, \quad d_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 - 2} \right)^{3n}.$$

**Megoldás.**

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}}{\left(1 + \frac{-2}{3n^2}\right)^{3n^2}} \rightarrow \frac{e}{e^{-2}} = e^3 = A$$

$$b_n = (a_n)^3 \implies b_n \rightarrow A^3 = e^9$$

$$c_n = (a_n)^n > 8^n, \text{ ha } n > N_1 \quad (a_n \rightarrow e^3 \text{ miatt } \exists N_1) \implies c_n \rightarrow \infty$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

$$d_n = \sqrt[n]{a_n} \implies \exists N_2 : n > N_2 \text{ esetén}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{e^3 - 0,1}}_{\downarrow 1} \leq d_n \leq \underbrace{\sqrt[n]{e^3 + 0,1}}_{\downarrow 1}$$

$$\implies d_n \rightarrow 1.$$

## 1.8.2. Feladatok

1. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben azok léteznek!

a)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{n+100}$

b)  $a_n = \left(\frac{n-2}{n+8}\right)^{n+7} (-1)^n$

c)  $a_n = \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{2n+8}$

$$d) a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n, \quad b_n = \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n, \quad c_n = \left(\frac{4n-1}{3n+2}\right)^n$$

$$e) a_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^3+8}, \quad b_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^4}, \quad c_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^2}$$

$$f) a_n = \left(1 - \frac{2}{n!}\right)^{n!}, \quad b_n = \left(1 - \frac{2}{n!}\right)^{(n-1)!}, \quad c_n = \left(1 - \frac{2}{n!}\right)^{(n+1)!}$$

$$2. a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{2n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}} = ?$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+4}\right)^{n^2+4}} = ?$$

3. Gyakorló példák rekurzív sorozatokhoz:

$$a) a_1 = 2; \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$$

$$b) a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$$

(Útmutatás:  $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ , először  $0 < a_n < 1$ -et mutassa meg.)

$$c) a_1 = \frac{1}{3}; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n}$$

$$(\text{Segítség: } a_{n+1} = \frac{a_n + 3 - 3}{3 + a_n} = 1 - \frac{3}{3 + a_n})$$

$$d) a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$$

$$e) a_1 = 4; \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$$

$$f) a_1 = 5; \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1} + 5}$$

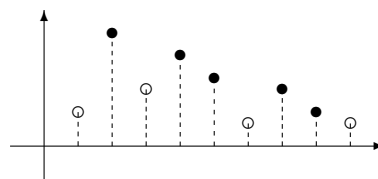
...

## 1.9. További tételek a határértékről (3)

**(T)** Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

**(B)**

„csúcs”:  $a_{n_0}$  csúcs, ha  $\forall n > n_0$ -ra  
 $a_n \leq a_{n_0}$





1.  $\exists$  végtelen sok csúcs  $\implies$  van monoton csökkenő részsorozat, hiszen ezek a csúcsok monoton csökkenő részsorozatot alkotnak.
2. Véges sok csúcs van (esetleg nincs is).  
 $a_{s_1}$ : a legnagyobb indexű csúcs után következő elem. (Ha nem volt:  $a_{s_1} = a_1$ .)  
 $a_{s_1}$  nem csúcselem.  
 $\exists s_2 > s_1 : a_{s_2} \geq a_{s_1}$ , különben  $a_{s_1}$  csúcs lenne.  $a_{s_2}$  sem csúcselem.  
 $\exists s_3 > s_2 : a_{s_3} \geq a_{s_2}$ , különben  $a_{s_2}$  csúcs lenne.  
 Stb. Így kapunk egy  $(a_{n_r}) \nearrow$  részsorozatot. ■

### Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel:

**(T)** Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

**(B)** Az előző tétel miatt  $\exists$  monoton részsorozat, és mivel ez korlátos  $\implies$  konvergens. ■

**(M)** A racionális számok  $\mathbb{Q}$  halmazában nem igaz a Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel. Legyen  $(b_n) = (1, 1,4, 1,41, 1,414, \dots) \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ,  $b_n \in \mathbb{Q}$ .  
 $(b_n) \subset [1, 2]$ , azaz korlátos.  $(b_n)$  minden részsorozata  $\sqrt{2}$ -höz konvergál, tehát nincs  $(b_n)$ -nek olyan részsorozata, amely egy  $\mathbb{Q}$ -beli elemhez konvergálna.

•••

### Szükséges és elégséges tétel számsorozat konvergenciájához

Cauchy-féle konvergenciakritérium:

**(T)** Az  $(a_n)$  számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ :

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall n, m > M(\varepsilon) \text{ esetén}$$

( $\neg B$ )

**(M<sub>1</sub>)** Más megfogalmazásban:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \quad \forall n > M(\varepsilon), \forall k \in \mathbb{N} \text{ esetén}$$

**(M<sub>2</sub>)** A tétel azt a tényt fejezi ki, hogy konvergens sorozat elemei egymáshoz is tetszőlegesen közel vannak, ha indexeik elég nagyok. Ezt a tételt használhatjuk a konvergencia bizonyítására akkor is, ha a határértéket nem ismerjük.

Ⓓ Az  $(a_n)$  számsorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists M(\varepsilon)$ :

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n, m > M(\varepsilon)$$

A Cauchy-féle konvergencia tételt megfogalmazhatjuk a következőképpen is:

Az  $(a_n)$  számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Ⓜ  $\mathbb{Q}$ -ban a Cauchy-sorozat nem feltétlenül konvergens.

Például  $(a_n) = (1, 1,4, 1,41, 1,414, \dots) \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Az  $(a_n)$  Cauchy-sorozat, mert  $|a_{n+k} - a_n| < 10^{-N} = \varepsilon$ , ha  $n > N$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tetszőleges. Nincs olyan  $\mathbb{Q}$ -beli elem, amelyhez  $(a_n)$  konvergálna.

...

### Egy fontos példa

Ⓟ

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$

**Megoldás.**

$$s_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$$

$$s_{2N} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N}$$

$N$ -et akármilyen nagyra választjuk:

$$|s_{2N} - s_N| = \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát nem szorítható  $\varepsilon$  alá, ha  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ . Nem teljesül rá a Cauchy-féle konvergencia kritérium  $\implies$  divergens.

Mivel  $(s_n) \nearrow \implies s_n \rightarrow \infty$ .

...

## 1.10. Sorozat torlódási pontjai

**(D) (Torlódási pont (sűrűsödési pont, sűrűsödési érték):)**  $t \in \mathbb{R}$ , ill.  $t = \infty$ , vagy  $t = -\infty$  az  $(a_n)$  torlódási pontja, ha minden környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza  
(Tehát létezik olyan  $(a_{n_r})$  részsorozat, amely  $t$ -hez tart.)  
( $+\infty$  környezetei  $(P, \infty)$  alakúak, ahol  $P \in \mathbb{R}$ .  $-\infty$  környezetei  $(-\infty, M)$  alakúak, ahol  $M \in \mathbb{R}$ .)

**(T)**  $(a_n)$  valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha pontosan egy valós szám a torlódási pontja.  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  akkor és csak akkor, ha  $t = \infty$  az egyetlen torlódási pont.

**(D)**  $S := (a_n)$  torlódási pontjainak halmaza.

**(T)** Ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos, akkor létezik legnagyobb torlódási pont. ( $\neg B$ )

**(D) (Limesz szuperior:)**

$$\limsup a_n \stackrel{\text{jel}}{=} \overline{\lim} a_n := \begin{cases} \text{legnagyobb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza} \\ & \text{felülről korlátos} \\ -\infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{-\infty\} \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$$

**(D) (Limesz inferior:)**

$$\liminf a_n \stackrel{\text{jel}}{=} \underline{\lim} a_n := \begin{cases} \text{legkisebb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza} \\ & \text{alulról korlátos} \\ \infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{\infty\} \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases}$$

**(M)** Ha  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \implies \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

[Gy](#)

**(Pl.)**  $a_n = 2^{(-1)^n n}$ ;  $\overline{\lim} a_n = ?$ ,  $\underline{\lim} a_n = ?$

**Megoldás.** Ha  $n$  páros:  $a_n = 2^n \rightarrow \infty$  (Részletezve:  $n = 2m : a_{2m} = 2^{2m} = 4^m \rightarrow \infty$ )

Ha  $n$  páratlan:  $a_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$  ( $n = 2m + 1 : a_{2m+1} = 2^{-(2m+1)} = \frac{1}{2 \cdot 4^m} \rightarrow 0$ )

Így a sorozat torlódási pontjai:  $0, \infty \implies \overline{\lim} a_n = \infty, \quad \underline{\lim} a_n = 0$

**Pl.**

$$a_n = \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{2n^2 + 3n + 7}$$

Adja meg a számsorozat torlódási pontjait!  $\overline{\lim} a_n = ?$ ,  $\underline{\lim} a_n = ?$

**Megoldás.**  $n$  értékétől függően három részsorozat viselkedését kell vizsgálnunk.

Ha  $n = 2m : \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , ezért a kapott részsorozat:

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2 + 3n + 7} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Ha  $n = 4m + 1 : \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = 1$ , ekkor a részsorozat:

$$a_n = \frac{2n^2}{2n^2 + 3n + 7} \rightarrow 1$$

Ha  $n = 4m - 1 : \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = -1$ , így a részsorozat:

$$a_n = 0 \rightarrow 0$$

Tehát a torlódási pontok halmaza:  $S = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$$\overline{\lim} a_n = 1, \quad \underline{\lim} a_n = 0$$

**Pl.**

$$a_n = \frac{3^{2n+1} + (-4)^n}{5 + 9^{n+1}}, \quad b_n = a_n \cdot \cos n\pi$$

$$\overline{\lim} a_n = ?, \quad \underline{\lim} a_n = ? \quad \overline{\lim} b_n = ?, \quad \underline{\lim} b_n = ?$$

**Megoldás.**  $a_n = \frac{3 \cdot 9^n + (-4)^n}{5 + 9 \cdot 9^n} = \underbrace{\frac{9^n}{=1}}_{=1} \frac{3 + \left(\frac{-4}{9}\right)^n}{5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n + 9} \rightarrow \frac{3+0}{0+9} = \frac{1}{3}$

Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \frac{1}{3}$$

Az  $(a_n)$  sorozat konvergens, mert egyetlen véges torlódási pontja van.

$(b_n)$  vizsgálata:  $\cos n\pi = (-1)^n$ .

Ezért, ha  $n$  páros:  $b_n = a_n \rightarrow \frac{1}{3}$

Ha  $n$  páratlan:  $b_n = -a_n \rightarrow -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \overline{\lim} a_n = \frac{1}{3}, \quad \underline{\lim} a_n = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \nexists$$

**P1.**

Határozza meg az alábbi sorozatok limeszét (ha létezik), valamint limesz szuperiorját és a limesz inferiorját!

a)  $a_n = \frac{-4^n + 3^{n+1}}{1 + 4^n}$

b)  $b_n = \frac{(-4)^n + 3^{n+1}}{1 + 4^n}$

c)  $c_n = \frac{(-4)^n + 3^{n+1}}{1 + 4^{2n}}$

**Megoldás.** a)  $a_n = \frac{-4^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n} = \underbrace{\frac{4^n}{4^n}}_{=1} \frac{-1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \rightarrow \frac{-1 + 0}{0 + 1} = -1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = -1$$

b)  $b_n = \frac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 4^n} = \underbrace{\frac{(-4)^n}{4^n}}_{=(-1)^n} \underbrace{\frac{1 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}}_{:=\beta_n} = (-1)^n \beta_n$

$$\beta_n \rightarrow \frac{1 + 0}{0 + 1} = 1$$

Ha  $n$  páros:  $b_n = \beta_n \rightarrow 1$

Ha  $n$  páratlan:  $b_n = -\beta_n \rightarrow -1$

$$\implies \overline{\lim} b_n = 1, \quad \underline{\lim} b_n = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \nexists$$

$$\text{c) } c_n = \frac{(-4)^n + 3 \cdot 3^n}{1 + 16^n} = \frac{(-4)^n}{\underbrace{16^n}_{=(-\frac{1}{4})^n}} \frac{1 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{16}\right)^n + 1} \rightarrow 0 \cdot \frac{1+0}{0+1} = 0$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \overline{\lim} c_n = \underline{\lim} c_n = 0$$

## 2. fejezet

# Valós számsorok

### 2.1. Numerikus sorok konvergenciája

Thom<sub>1</sub>  
⇒

App  
⇒

A  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  végtelen összeghez hozzárendelünk egy  $(s_n)$  számsorozatot a következő módon:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{a_1}_{s_1} + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{s_2}$$
$$\underbrace{\hspace{15em}}_{s_3}$$
$$\underbrace{\hspace{20em}}_{s_n}$$

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k : \quad n\text{-edik részletösszeg}$$

E számsorozat határértékének segítségével definiáljuk a sor összegét az alábbiaknak megfelelően.

Ⓓ A  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  numerikus sor konvergens és összege  $s$ , ha létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) = s \in \mathbb{R}$$

(véges) határérték.

<sup>1</sup>lásd Thomas 11-es bemutató 2. fejezet (21-31. oldal).

A részletösszegek  $(s_n)$  sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R}, & \text{az összeg konvergens} \\ +\infty, \\ -\infty, \\ \# , \end{cases} \text{ az összeg divergens.}$$

**Pl.**  $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = ?$

**Megoldás.**  $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$  esetén  $s_n = \sum_{k=1}^n 1 = n$   
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  (Divergens a sor.)

**Pl.**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = ?$

**Megoldás.**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^k + \dots$  divergens, mert

$$\left. \begin{array}{l} s_{2k+1} = 1 \rightarrow 1 \\ s_{2k} = 0 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \implies (s_n) \text{-nek 2 torlódási pontja van, a sor divergens.}$$

**Pl.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = ?$

**Megoldás.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{s_n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}}_{s_n} = \frac{1}{2} \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1,$$

tehát a sor konvergens.

**Pl.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = ?$



Megoldás.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{-1}{2} + 1 \right) + \left( \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{-1}{4} + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1, \quad \text{konvergens a sor.} \end{aligned}$$

Pl.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  (harmonikus sor) divergens

Megoldás.

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \\ &\quad + \left( \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) + \left( \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2^k} = \infty &\implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \end{aligned}$$

Ugyanis  $s_n \geq s_{2^k}$ , ha  $n > 2^k$  miatt  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ .

(M) Ha a sorban *véges sok* tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik, konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. A sorösszeg értéke természetesen megváltozik.

### 2.1.1. Geometriai (mértani) sor

(T) Geometriai sor

$$1 + q + q^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \quad s_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

Ha  $q = 1$ :

$$s_n = n, \quad \text{ezért} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Ha  $q \neq 1$ :

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mivel  $q^n \rightarrow 0$ , ha  $|q| < 1$ , ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{ha } |q| < 1.$$

Mivel  $q^n \rightarrow \infty$ , ha  $q > 1 \implies s_n \rightarrow \infty$ , ha  $q > 1$ .

Ha  $q = -1$ :

$q^n$ -nek két torlódási pontja van, mégpedig  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -1$ .

$\implies s_n$ -nek is 2 torlódási pontja van: 0 és 1, tehát divergens.

Ha  $q < -1$ :

$q^n$ -nek két torlódási pontja van, mégpedig  $t_1 = -\infty$ ,  $t_2 = \infty$ .

$\implies s_n$ -nek is 2 torlódási pontja van:  $-\infty$  és  $\infty$ , tehát divergens.

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum_{k=3}^{\infty} q^k = q^3 + q^4 + q^5 + \dots = \frac{q^3}{1 - q}, \quad \text{ha } |q| < 1.$$

A részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek  $q^3$ -szeresei, így a határérték (a sor összege) is  $q^3$ -nel szorzódik.

$$\textcircled{Pl.} \quad a + aq + aq^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a q^k = \sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1} = \frac{a}{1 - q}, \quad \text{ha } |q| < 1$$

Most a részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek  $a$ -szorosai, így a határérték is  $a$ -szoros lesz.

(A képletet úgy érdemes megjegyezni, hogy  $s = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}$ .)

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = ?$$

Megoldás. 
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{((-2)^3)^k}{(3^2)^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-8)^k}{9^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^k =$$

$$= -\left(\frac{8}{9}\right)^3 + \left(\frac{8}{9}\right)^4 - \left(\frac{8}{9}\right)^5 \pm \dots = \frac{-\left(\frac{8}{9}\right)^3}{1 - \left(-\frac{8}{9}\right)}$$

$$(q = \frac{8}{9}, \quad |q| < 1)$$

Pl. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k+1}}{4^{k+2}} = ?$$

Megoldás.

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{2^k}{4^{k+2}} + \frac{3^{k+1}}{4^{k+2}} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \right)$$

$$s_n = \frac{1}{16} \left( \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k \right) = \frac{1}{16} \left( \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} + 3 \frac{3}{4} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1} \right)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{16} \cdot \left( \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} \right) = \frac{5}{8}$$

Pl. Milyen  $x$ -re konvergens a  $\sum_{k=0}^{\infty} (\log_2 x)^k$  sor?

Megoldás.  $q = \log_2 x, \quad |\log_2 x| < 1 \iff -1 < \log_2 x < 1,$   
 $2^{-1} < x < 2, \quad \text{azaz } x \in (2^{-1}, 2).$

### 2.1.2. Konvergens sorok összege és konstansszorosa

T Ha  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$  és  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b, \quad S_a, S_b, c \in \mathbb{R}$   

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot S_a.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{B} \quad S_a &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \\ S_b &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k \\ S_{a+b} &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{a+b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) = S_a + S_b \end{aligned}$$

Másrészt

$$S_{ca} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{ca} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (c a_k) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = c S_a \quad \blacksquare$$

Ezen tételek segítségével egyszerűbben oldhatók meg az előző típusú feladatok.

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} = ?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} &= \frac{(-3)^2}{2^1} \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = \frac{9}{2} \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{9}{2} \frac{\frac{9}{16}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{9}{2} \frac{9}{16} \frac{4}{7} = \frac{81}{28} \end{aligned}$$

( $q = -\frac{3}{4}$ ,  $|q| < 1$  teljesül.)

$$\textcircled{Pl.} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+2} + (-2)^{k+2}}{5^k} = ?$$

Megoldás. A sor két konvergens **geometriai sor** összege:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 3^k + (-2)^2 \cdot (-2)^k}{5^k} &= 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^k = 9 \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} + \\ &+ 4 \frac{-\frac{2}{5}}{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)} \end{aligned}$$

$$(q_1 = \frac{3}{5}, \quad |q_1| < 1, \quad q_2 = -\frac{2}{5}, \quad |q_2| < 1)$$

•••

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele (Cauchy-kritérium):

**(T) Cauchy-tétel**

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  akkor és csak akkor konvergens, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists M(\varepsilon)$ :

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon) \text{ és } k \in \mathbb{N}^+$$

**(B)** Triviálisan igaz, hiszen a számsorozatok konvergenciájára tanult szükséges és elégséges **tétel** alkalmazható.  $(s_n)$  akkor és csak akkor konvergens, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists M(\varepsilon)$ , hogy  $n, m > M(\varepsilon)$  esetén  $|s_m - s_n| < \varepsilon$ .

Legyen  $m > n$  és  $m = n + k$ ! Mivel

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$s_m = s_{n+k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon,$$

ha  $n > M(\varepsilon)$  és  $k \in \mathbb{N}^+$  tetszőlegesen. ■

**(Pl.)** Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$  (alternáló harmonikus sor)?

**Megoldás.** Igen, ugyanis

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n+k} \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left( \underbrace{\left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)}_{>0} + \underbrace{\left( \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right)}_{>0} \right) = \\
& = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)}_{>0} - \dots - \underbrace{\left( \frac{1}{n+k} \right)}_{>0}, \quad \text{ha } k \text{ páros} \\
& \left( \underbrace{\left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)}_{>0} + \underbrace{\left( \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1} \right)}_{>0} + \frac{1}{n+k} \right) = \\
& = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)}_{>0} - \dots - \underbrace{\left( \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right)}_{>0}, \quad \text{ha } k \text{ páratlan}
\end{aligned}$$

Vagyis

$$|s_{n+k} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \implies N(\varepsilon) \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$$

Későbbiekben könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez egy úgynevezett [Leibniz-sor](#).

### 2.1.3. A konvergencia szükséges feltétele

$$\textcircled{\mathbf{T}} \quad \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens} \right) \implies \left( \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \right)$$

$\textcircled{\mathbf{B}}$  A [Cauchy-kritériumból](#) ( $k = 1$  választással):

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \implies a_n \rightarrow 0$$

Vagy (egy másik bizonyítás)

$$s_n = s_{n-1} + a_n \implies a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0 \quad \blacksquare$$

$\textcircled{\mathbf{M}}$  A feltétel nem elégséges. Például a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  sor a feltételt teljesíti, mégis divergens.

Thom<sub>2</sub>

App

## 2.2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \dots + (-1)^{n+1}c_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n, \quad c_n > 0$$

**Leibniz-kritérium:**

**(T)** Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent  $(c_n)$ ) monoton fogyóan tart 0-hoz (jelben  $c_n \searrow 0$ ), akkor a sor konvergens.

Az ilyen alternáló sor neve: **Leibniz-sor**.

**(B)** Belátjuk, hogy  $s_{2k} \nearrow$  és felülről korlátos:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{(c_{2k+1} - c_{2k+2})}_{\geq 0} \geq s_{2k} \implies s_{2k} \nearrow$$

Másrészt

$$\underbrace{0 \leq s_{2k+2}}_{\text{az előzőből látható}} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(c_{2k+2})}_{\geq 0} \leq c_1$$

Tehát  $s_{2k}$  monoton növekvő és felülről korlátos  $\implies s_{2k}$  konvergens, legyen  $s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}$ .

Megmutatjuk, hogy  $s_{2k+1} \rightarrow s$  szintén, és így a sor konvergens.

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k+1} \rightarrow s + 0 = s \quad \blacksquare$$

**(M)** Az is megmutatható, hogy az  $s_{2k+1}$  részsorozat monoton csökkenően tart  $s$ -hez.

$$\begin{aligned} 0 \leq s_{2k+1} &= (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \dots + (c_{2k-1} - c_{2k}) + c_{2k+1} = \\ &= \underbrace{(c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \dots + c_{2k-1}}_{s_{2k-1}} - \underbrace{(c_{2k} - c_{2k+1})}_{\geq 0} \leq s_{2k-1} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>lásd Thomas 11-es bemutatón 6. fejezet (49-60. oldal).

### Hibabecslés Leibniz-típusú soroknál

Tehát a Leibniz-típusú soroknál a páros indexű részletösszegek  $s$ -nél kisebbek vagy egyenlők:

$$s_{2k} \leq s.$$

A páratlan indexű elemek monoton csökkenve tartanak  $s$ -hez, ezért

$$s \leq s_{2k+1}.$$

Mivel

$s - s_{2k} \leq s_{2k+1} - s_{2k} = c_{2k+1}$  és  $s_{2k+1} - s \leq s_{2k+1} - s_{2k+2} = c_{2k+2}$ ,  
ezért

$$|H| = |s - s_n| \leq c_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

•••

**Pl.** Konvergencia-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$  sor?

**Megoldás.** A sor Leibniz-típusú és így konvergens, mivel  $c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \searrow 0$ .

**Pl.** Konvergencia-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$  sor?

**Megoldás.**

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{3} \sqrt{n}}}_{\downarrow 1} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq c_n < 1 \rightarrow 1$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , tehát nem teljesül a **konvergencia szükséges feltétele**, így a sor divergens.

**Pl.** Konvergencia-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$  sor?

**Megoldás.**

$$c_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0$$



A monoton csökkenés most nem triviálisan igaz, hiszen  $n$  növelésével a számláló és a nevező is nő. Várható, hogy a  $(c_n)$  sorozat monoton csökkenő, mert a nevező „gyorsabban nő”. De ezt ilyenkor be kell bizonyítanunk! Tehát igaz-e, hogy

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\stackrel{?}{\leq} c_n \\ \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} &\stackrel{?}{\leq} \frac{n+1}{n^2+2} \\ (n+2)(n^2+2) &\stackrel{?}{\leq} (n+1)(n^2+2n+3) \\ 0 &\stackrel{?}{\leq} n^2+3n-1 \quad \text{Ez pedig igaz, minden } n \text{-re.} \end{aligned}$$

És innen visszafelé igaz, hogy  $c_{n+1} \leq c_n$ .

Tehát a sor Leibniz-típusú és így konvergens.

Ha a sor összegét  $s_{100}$ -zal közelítjük, akkor az elkövetett hiba:

$$|H| = |s - s_{100}| \leq c_{101} = \frac{101+1}{101^2+2}$$

### 2.2.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz

[Gy](#)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

$$1. \sum_2^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\lg k}$$

$$2. \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$3. \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2k}{k^2-1}$$

$$4. \sum_2^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

## 2.3. Sorok abszolút és feltételes konvergenciája

Thom<sub>3</sub>  
⇒

Ⓓ  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  sor *abszolút konvergens*, ha  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergens.

Pl.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$  abszolút konvergens.

(Konvergens *geometriai sorokról* van szó, ahol a kvóciens  $-\frac{1}{2}$ , illetve  $\frac{1}{2}$ .)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  nem abszolút konvergens, de konvergens.

Ⓓ *Feltételesen konvergens sor:*  
a konvergens, de nem abszolút konvergens sor

Ilyen pl. a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  sor.

Ugyanis beláttuk, hogy ez a sor konvergens, de a  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  sor divergens.

Ⓙ  $\left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergens} \right) \implies \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens} \right)$   
*Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia.*

Ⓑ Ha  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergens, akkor teljesül rá a *Cauchy-kritérium*, továbbá

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|$$

miatt

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \leq \underbrace{|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}|}_{\text{Cauchy-kritérium } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{-ra}} < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon), \quad k \in \mathbb{N}^+$$

Így  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ -ra is teljesül a szükséges és elégséges tétel (*Cauchy-kritérium*), tehát konvergens. ■

Gy  
↓

<sup>3</sup>lásd Thomas 11-es bemutató 6. fejezet (49-60. oldal).

Ez a tétel azt mutatja, hogy az abszolút konvergencia vizsgálata igen hasznos lehet. A  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  sor elemei nem negatívak, sőt pozitívnak tekinthetők, mivel a nulla elemeket nyilván nem kell figyelembe vennünk.

## 2.4. Pozitív tagú sorok

- Ⓓ (i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekednek.  
(ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

- Ⓑ (i) Ha  $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , akkor  $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \forall n$ -re.  
(ii) a) Ha a sor konvergens, akkor  $(s_n)$  konvergens  $\implies (s_n)$  korlátos  
b) Ha  $(s_n)$  korlátos, akkor  $(s_n) \nearrow$  miatt  $(s_n)$  konvergens. ■

Ⓜ Pozitív tagú sor vagy konvergens, vagy  $\infty$ -nel egyenlő. Ez nem igaz általánosságban egy váltakozó előjelű sorra, ahol a részletösszegek sorozatának lehet több torlódási pontja (pl.  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ ).

- Ⓓ  $a_k > 0; a_k \geq a_{k+1}$  feltételek mellett  
 $a \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  sor akkor és csak akkor konvergens, ha  $\sum_{l=1}^{\infty} a_{2^l} \cdot 2^l$  is konvergens

Ⓑ ( $\neg$ B)

A bizonyítás lényege, hogy az első sor részletösszegei a második sor megfelelő részletösszegeivel alulról és felülről is becslhetőek. A becslés igazolásához fontos feltenni, hogy az  $(a_k)$  sorozat monoton csökken.

(A részletes bizonyítás megtekinthető Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai című könyvében.) ■

**Példák a tétel alkalmazására:**

- Ⓓ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konvergens, ha  $\alpha > 1$ . Egyébként divergens.

- Ⓑ Ha  $\alpha \leq 0$  :  $a_n = \frac{1}{n^\alpha} = n^{|\alpha|} \not\rightarrow 0$   
A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül  $\implies$  divergens a sor.

Ha  $\alpha > 0$  :  $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \searrow$ , így alkalmazható az előző tétel:

Vagyis  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  és  $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l$  egyidejűleg konvergencia, illetve divergencia.

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha l}} \frac{1}{2^{-l}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l\alpha-l} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} q^l \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Geometriai sor** kaptunk, mely csak akkor konvergencia, ha

$$|q| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Tehát a konvergencia csak akkor teljesül, ha  $\alpha - 1 > 0$ , vagyis  $\alpha > 1$ .

Vigyázat! A tételben szereplő két sor összege nem azonos, tehát nem tudtuk megállapítani a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  sor összegét, csak a konvergencia tényét tudtuk megállapítani  $\alpha > 1$ -re. Ilyenkor a megfelelő  $s_n$  részletösszeggel tudjuk közelíteni a sor összegét az esetleg előírt pontossággal (lásd hibabecslések, 2.5.6 fejezet).

Pl.  $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n}$  divergens

Ugyanis:  $\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot \log_2 2^l} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l}$  divergens.

Pl.  $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^p}$   $p > 1$  konvergencia, egyébként divergens

ⓑ  $p > 0$  esetén alkalmazható az előző tétel:

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l)^p} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l^p} \quad 0 < p \leq 1 : \text{div.}; \quad 1 < p : \text{konv.}$$

( $p \leq 0$  esete HF. Pl. **minoráns kritériummal** megmutatható. (Lásd később.) ■

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \quad \text{divergens}$$

A tétel alkalmazható.

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l) \cdot (\log_2 \log_2 2^l)} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_2 l} \quad \text{ez pedig divergens}$$

## 2.5. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok

Thom<sub>4</sub>  
⇒

- **majoráns kritérium** (csak konvergencia eldöntésére)
- **minoráns kritérium** (csak divergencia eldöntésére)
- **hányados kritérium**
- **gyökkritérium**
- **integrálkritérium**

Ezeket a kritériumokat kizárólag pozitív tagú sorokra alkalmazhatjuk. Így a szóbanforgó kritériumok hasznosak lehetnek az abszolút konvergencia eldöntésére (amiből következik az eredeti — nem feltétlenül pozitív tagú — sor konvergenciája is.)

### 2.5.1. Majoráns kritérium

App  
⇒

$$\textcircled{\text{T}} \quad \text{Ha } 0 < a_n \leq c_n \quad \forall n\text{-re és } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergens} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

**B** A feltétel miatt

$$\begin{aligned} a_1 &\leq c_1 \\ &\vdots \\ a_n &\leq c_n \end{aligned}$$

Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeadhatók, ezért

<sup>4</sup>lásd Thomas 11-es bemutató 3., 4. és 5. fejezet (32-48. oldal).

$$s_n^a = a_1 + \dots + a_n \leq c_1 + \dots + c_n = s_n^c .$$

Továbbá  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  konvergenciája miatt  $s_n^c \leq K \implies s_n^a$  korlátos és mivel pozitív tagú a sor  $\implies \sum_1^{\infty} a_n$  konvergens. ■

App  
⇒

### 2.5.2. Minoráns kritérium

$$\textcircled{T} \quad \text{Ha } 0 \leq d_n \leq a_n \quad \forall n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{ divergens} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

$$\textcircled{B} \quad s_n^a \geq s_n^d \rightarrow \infty \implies s_n^a \rightarrow \infty \quad (\text{spec. rendőrelv}) \quad \blacksquare$$

$\textcircled{M}$  Mindkét esetben elegendő, ha a feltétel  $\forall n$  helyett  $n \geq N_0$ -ra teljesül.

( $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  és  $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n$  egyidejűleg konvergens, ill. divergens, hiszen az első szumma részletösszegei  $c = \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n$  konstanssal nagyobbak, mint a második szumma részletösszegei.)

$$\textcircled{Pl.} \quad \text{Konvergens-e a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ sor?}$$

**Megoldás.** A harmonikus sorból végtelen sok tagot elhagytunk. A [minoráns kritériummal](#) belátjuk, hogy még ez a sor is divergens. Ugyanis

$$a_n > \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

$$\textcircled{Pl.} \quad \text{Konvergens-e a } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^5+3}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ sor?}$$

**Megoldás.**

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{2n^5}} = \frac{1}{\sqrt{2} n^{5/2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \text{ konvergens } (\alpha = \frac{5}{2} > 1)$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

**Pl.** Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{2n^5 + 3}}$  =  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor?

**Megoldás.** A sor divergens, mivel a [rendőrelvel](#) megmutatható, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , tehát nem tart nullához, így nem teljesül a [konvergencia szükséges feltétele](#). Részletezve:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[5]{5} (\sqrt[5]{n})^5}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{1 \cdot 1^5} = 1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2n^5 + 3n^5}} \leq a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{2n^5 + 3}} < \frac{1}{\sqrt[5]{1}} = \underbrace{1}_{\downarrow 1}$$

$$\implies a_n \rightarrow 1.$$

**Pl.** Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^4+5}$  =  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor?

**Megoldás.**

$$a_n < \frac{n+2n}{3n^4} = \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konvergens } (\alpha = 3 > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

**Pl.** Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 32}{n^3 + 8}$  =  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor?

**Megoldás.**  $n \geq 4$ -re a sor pozitív tagú. A [minoráns kritériummal](#) megmutatjuk, hogy divergens.

Ugyanis, ha  $n \geq 6$ , akkor  $n^2 > 32$  és ezért

$$a_n = \frac{2n^2 - 32}{n^3 + 8} > \frac{2n^2 - n^2}{n^3 + 8n^3} = \frac{1}{9n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

**(Pl.)** Konvergencia-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{2n+3} + 5} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor?

**Megoldás.**

$$a_n = \frac{2^n + 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^n + 5} < \frac{3^n + 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 4^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ konvergens geometriai sor } \left(q = \frac{3}{4}, |q| < 1\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

### Feladatok

$\rightarrow$

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1.  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

6.  $\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$

2.  $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$

7.  $\sum_1^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n - 3}$

3.  $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2 \log_2 n}$

8.  $\sum_1^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n + 2^{n+1}}$

4.  $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n^2}$

9.  $\sum_1^{\infty} \frac{3^n + n}{n \cdot 4^n - 3}$

5.  $\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2} - 3}$

10.  $\sum_1^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$



$$11. \sum_1^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^6 + 3n^2 - \sqrt{n}}$$

$$13. \sum_1^{\infty} \frac{7n^5 + n^3 + 1}{n^8 - n^2 + 3}$$

$$12. \sum_1^{\infty} \frac{7n^5 - 2n^3 + 1}{n^7 + n^2 - n + 3}$$

$$14. \sum_6^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$$

### 2.5.3. Hányados kritérium

**(T<sub>1</sub>)**

$$1. (a_n > 0, \forall n) \wedge \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \forall n \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$2. (a_n > 0, \forall n) \wedge \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \geq 1, \forall n \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

**(B)** 1. Mivel  $a_{n+1} \leq q a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq q^3 a_{n-2} \leq \dots \leq q^n a_1, \forall n$ , ezért

$$\sum_1^{\infty} a_n \text{-nek } \sum_1^{\infty} q^{n-1} a_1 \text{ konvergens majoránsa (geometriai sor, } 0 < q < 1)$$

$$\implies \sum_1^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

2. Mivel  $a_{n+1} \geq q a_n \geq q^2 a_{n-1} \geq \dots \geq q^n a_1, \forall n$ , ezért

$$\sum_1^{\infty} a_n \text{-nek } \sum_1^{\infty} q^{n-1} a_1 \text{ divergens minoránsa (geometriai sor, } q \geq 1) \implies$$

$$\sum_1^{\infty} a_n \text{ divergens.} \quad \blacksquare$$

[App](#)  
 $\implies$

**(M<sub>1</sub>)**  $\sum_1^{\infty} a_n$  és  $\sum_{N_0}^{\infty} a_n$  egyidejűleg konvergens, ill. divergens, ezért elég, ha a T<sub>1</sub>

feltételei  $\forall n \geq N_0$ -ra teljesülnek.

(Természetesen, ha konvergensek, akkor az első sor összege  $a_1 + a_2 + \dots + a_{N_0-1}$ -gyel több, mint a második sor összege.)

**(M<sub>2</sub>)** T<sub>1</sub> (1)-nél nem elég megmutatni, hogy  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ,  $q$ -t is kell találni.

**(Pl.)**  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$  divergens, pedig

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \text{miatt} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

(Pl.)  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergens. És most is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1. \quad (\text{De } \nexists 0 < q < 1)$$

(M<sub>3</sub>) T<sub>1</sub> (2)-nél viszont  $q$  megtalálása nem fontos. A tétel így is kimondható.

$$(a_n > 0) \wedge \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq N_0\right) \implies \sum_1^{\infty} a_n \text{ div.}$$

Ekkor ugyanis:

$$0 < a_n \leq a_{n+1}, \text{ tehát } a_n \nearrow (\text{és } a_n > 0) \implies a_n \not\rightarrow 0 \text{ (nem teljesül a szükséges feltétel)} \implies \sum_1^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

A hányados kritérium egy kényelmesebben használható formában is kimondható:

(T<sub>1</sub><sup>\*</sup>)

$$1. (a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$2. (a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1 \text{ vagy } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div.}$$

(B) 1. Legyen  $\varepsilon = \frac{1-c}{2}$ , így  $q = c + \varepsilon < 1$ . A határérték tulajdonsága miatt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Ezért T<sub>1</sub> (1)-ből adódik, hogy  $\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} a_n$  és így vele együtt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  is konvergens.

2. Legyen  $\varepsilon = \frac{c-1}{2}$ , így  $q = c - \varepsilon > 1$ . Ekkor  $\exists N(\varepsilon)$ , hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Így  $T_1^*$  (2)-ből adódik az állítás.

$T_1^*$  (2) állítása  $c = \infty$  esetén is igaz. Ugyanis, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ , akkor is található megfelelő  $q$ . (Pl.  $q = 2$  is választható.)

**(M<sub>4</sub>)** Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , akkor nem tudunk meg semmit a konvergenciáról. Lehet a sor konvergens és divergens is.

**(Pl.)**  $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$  divergens, és a  $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$  konvergens sorok esetén egyaránt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ .

**(M<sub>5</sub>)** A fenti tétel tovább finomítható. Bebizonyíthatók az alábbi állítások is:

Ha  $a_n > 0 \forall n$ , és  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_1^\infty a_n$  konvergens.

Ha  $a_n > 0 \forall n$ , és  $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_1^\infty a_n$  divergens.

( $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  a konvergenciáról nem mond semmit.)

**(Pl.)** Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+2) 3^{n+1}}{n!}$  sor?

**Megoldás.** A feladatot a  $T_1^*$  tétellel (hányadoskritériummal) oldjuk meg.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3) 3^{n+2} n!}{(n+1)! (n+2) 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \frac{1 + \frac{3}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 0 < 1 \implies \sum_1^\infty a_n \text{ konvergens.} \end{aligned}$$

## Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

$$1. \sum_1^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(2n+1)!}$$

$$4. \sum_1^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$2. \sum_1^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2} (n+2)!}$$

$$5. \sum_1^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^{n+3}}$$

$$3. \sum_1^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$6. \sum_1^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

### 2.5.4. Gyökkritérium

**(T<sub>2</sub>)** Ha  $\forall n \geq N$ -re  $a_n > 0$  és

$$1. \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies \sum_N^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

$$2. \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies \sum_N^{\infty} a_n \text{ div.}$$

**(B)** 1.  $0 < a_n \leq q^n$  és  $\sum_N^{\infty} q^n$  konvergens  $\implies \sum_N^{\infty} a_n$  konvergens a **majoráns kritérium** miatt.

$$2. a_n \geq 1 \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_N^{\infty} a_n \text{ div.} \quad \blacksquare$$

**(M<sub>6</sub>)**  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  elég, ha végtelen sok  $n$ -re igaz. Nem kell, hogy  $\forall n > N$ -re teljesüljön. Ekkor már  $\exists a_{n_r} \not\rightarrow 0$  részsorozat.

Ez a tétel is kimondható limeszes alakban:

$$\textcircled{T_2^*} \quad \text{Ha } a_n > 0 \text{ és } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c, \text{ akkor}$$

$$c < 1 \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$c > 1 \text{ vagy } c = \infty \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

ⓑ Hasonló a [hányados kritériumnál](#) látotthoz. ■

Ⓜ<sub>7</sub>  $c = 1$ , tehát  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  esetén nem használható a [gyökkritérium](#). Az alábbi két példa igazolja állításunk helyességét.

Ⓟ<sub>1</sub>  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Ⓟ<sub>2</sub>  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Bebizonyítható az alábbi állítás is:

$$\textcircled{T} \quad \begin{array}{l} \text{Ha } a_n > 0, n > N \text{ és } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. } (\neg B) \\ \text{Ha } a_n > 0, n > N \text{ és } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div.} \end{array}$$

Ⓜ<sub>8</sub> A második állítás könnyen bizonyítható, hiszen  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$ -ből következik a divergencia, mivel végtelen sok  $n$ -re:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \implies a_n > 1; \text{ tehát } \exists a_{n_r} \not\rightarrow 0 \text{ részsorozat.}$$

Ⓟ<sub>1</sub> Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^{2n^3}$  sor?

**Megoldás.** A feladatot a  $T_2^*$  tétellel ([gyökkritériummal](#)) oldjuk meg.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1 + \frac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}} = \frac{e^2}{e^5} = \frac{1}{e^3} < 1$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

### Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\sum_1^{\infty} \frac{3^n}{n^2 7^n}$                  | 5. $\sum_1^{\infty} \left( \frac{3n+1}{3n+3} \right)^{n^2+2n}$        |
| 2. $\sum_1^{\infty} \frac{n^2 3^n}{7^{n+1}}$              | 6. $\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{4n+1}$                                 |
| 3. $\sum_1^{\infty} \frac{n^6}{2^{n+3}}$                  | 7. $\sum_1^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{2n+1} (3n+1)}$                  |
| 4. $\sum_1^{\infty} \left( \frac{n+3}{n+5} \right)^{n^2}$ | 8. $\sum_1^{\infty} \left( \frac{n}{n-2} \right)^{n^2} \frac{1}{4^n}$ |

### További kidolgozott példák

Pl. Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^4 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor?

**Megoldás.** Ezt a feladatot legegyszerűbben a majoráns kritériummal oldhatjuk meg.

$$a_n < \frac{8^n}{n^4 8^n} = \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{ konvergens } (\alpha = 4 > 1) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

A [hányados kritérium](#), illetve a [gyökkritérium](#) is használható lenne.

Ⓐ. Konvergencia-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 7^n}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor?

**Megoldás.** Ennek a feladatnak a megoldása már a majoráns kritériummal elég nehézkes lenne. A [hányados kritérium](#) alkalmazható, de itt a [gyökkritérium](#) alkalmazása a legjobb választás.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^4 7}{8} = \frac{7}{8} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

Ⓐ. Konvergencia-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+1) 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor?

**Megoldás.** Most viszont a [hányados kritérium](#) alkalmazása a legcélszerűbb. (A [gyökkritérium](#) alkalmazásánál a [rendőrelvre](#) is szükségünk lenne az  $\sqrt[2n+1]{2n+1}$  sorozat határértékének bizonyításához.)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}}{(2n+3) 5^{n+1}} \frac{(2n+1) 5^n}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5} \frac{2n+1}{2n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{3}{5} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.} \end{aligned}$$

Ⓐ. Konvergencia-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! 2^n}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! \left(\frac{2}{9}\right)^n$  sor?

**Megoldás.** Itt is a [hányados kritériumot](#) alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{(n+1)! \left(\frac{2}{9}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{9} (n+2) = \infty > 1 \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.} \end{aligned}$$

**Pl.** Abszolút vagy feltételesen konvergens-e a  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n^2 + 3}$  sor?

**Megoldás.** Nem abszolút konvergens, mert

$$|a_n| = \frac{n}{5n^2 + 3} \geq \frac{n}{5n^2 + 3n^2} = \frac{1}{8n}$$

és  $\frac{1}{8} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergens, tehát  $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$  divergens (a minoráns kritérium miatt).

Viszont  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  konvergens, mert Leibniz-típusú. Ugyanis

$$|a_n| = \frac{n}{5n^2 + 3} \searrow 0, \text{ mert}$$

$$|a_n| = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}} \frac{1}{5 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{5} = 0$$

És

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &= \frac{n+1}{5(n+1)^2 + 3} < \frac{n}{5n^2 + 3} = |a_n| \\ &\quad \uparrow \\ (n+1)(5n^2 + 3) &< n(5n^2 + 10n + 8) \\ &\quad \uparrow \\ 5n^3 + 5n^2 + 3n + 3 &< 5n^3 + 10n^2 + 8n \\ &\quad \uparrow \\ 0 &< 5n^2 + 5n - 3, \quad \text{ha } n \geq 2 \end{aligned}$$

Vagyis a sor feltételesen konvergens.

### 2.5.5. Integrálkritérium

App  
⇒

**(T)** Legyen  $f$  pozitív értékű monoton csökkenő függvény  $[1, \infty)$ -en és  $f(k) = a_k > 0$

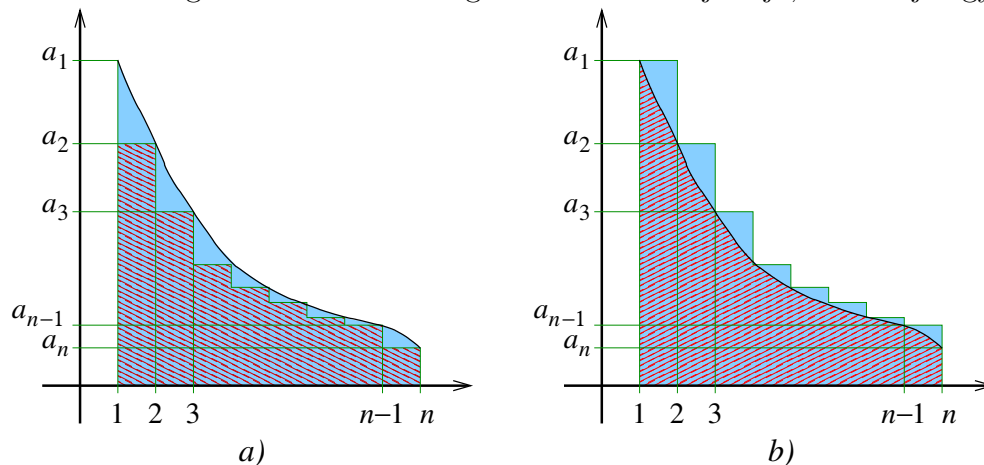
$$1. \text{ Ha } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergens} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}$$

$$2. \text{ Ha } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ divergens} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergens}$$



Ⓜ  $\iff$  állítás is igaz, tehát a sor és az **impropius integrál** egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

2.1. ábra. Az integrál és a részletösszeg kölcsönösen majorálja, minorálja egymást



ⓑ 1. Tekintsük a 2.1.a) ábrát! Mivel

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq \underbrace{\int_1^n f(x) dx}_{\text{monoton növekvő függvénye } n\text{-nek}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \int_1^\infty f(x) dx \in \mathbb{R},$$

$$a_k > 0 \text{ és } \sum_2^n a_k \text{ korlátos} \implies \sum_2^\infty a_k \text{ konvergens} \implies \sum_1^\infty a_k \text{ konvergens}$$

2. Tekintsük a 2.1.b) ábrát!

$$\int_1^n f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = s_{n-1}$$

$$\text{Mivel } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \infty, \text{ tehát a sor divergens. } \blacksquare$$

A  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  sor konvergenciája

Ⓓ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  sor konvergens, ha  $\alpha > 1$ , minden más esetben divergens.

Ⓑ  $\alpha \leq 0$  esete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{|\alpha|} \rightarrow 0$$

( $\alpha = 0$  esetén 1-hez tart,  $\alpha < 0$  esetén pedig  $\infty$ -hez tart)

$\Rightarrow$  a sor divergens, mivel nem teljesül a [konvergencia szükséges feltétele](#).

$\alpha > 0$  esete:

$f(x) := \frac{1}{x^{\alpha}}, x \geq 1$  : a függvény monoton csökkenő és  $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}} = a_n$ .

Így alkalmazható a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergenciájának vizsgálatára az [integrálkritérium](#).

[Mint bizonyítottuk](#)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$  konvergens  $\alpha > 1$ -re, ezért a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  sor is konvergens,

ha  $\alpha > 1$ . Az improprius integrál divergens  $0 < \alpha < 1$  esetén, így ekkor a vizsgált sor is divergens. ■

## 2.5.6. Hibabecslés pozitív tagú sorok esetén

### Integrálkritériummal

Ha a sor konvergenciája [integrálkritériummal](#) állapítható meg, akkor az  $s$  sorösszeg  $s_n$  részletösszeggel való közelítésének hibáját is egy integrállal becsülhetjük.

Ⓓ Ha az [integrálkritérium 1. állításának feltételei teljesülnek](#), akkor az  $s \approx s_n$  közelítésnél elkövetett hiba

$$0 < H = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

Ⓑ Mivel

$$a_{n+1} + a_{n+2} \cdots + a_m \leq \int_n^m f(x) dx,$$

ezért

$$H = r_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m a_k \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_n^m f(x) dx = \int_n^{\infty} f(x) dx. \quad \blacksquare$$

**P1.** Konvergensek-e az alábbi sorok?

a)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n^{10}}$

b)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln \sqrt{n})^2}$

Amelyik sor konvergens, annál adjon becslést az  $s \approx s_{1000}$  közelítésnél elkövetett hibára!

[Gy](#)

**Megoldás.**

a)  $f(x) := \frac{1}{x \ln x^{10}} = \frac{1}{10} \frac{1}{x \ln x}, \quad x \geq 3$

$f$  pozitív értékű monoton csökkenő függvény a  $[3, \infty)$  intervallumon és  $f(n) = a_n > 0 \implies$  alkalmazható az [integrálkritérium](#).

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{1}{10} \frac{1}{x \ln x} dx &= \frac{1}{10} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_3^{\omega} \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{f'/f \text{ alakú}} dx = \frac{1}{10} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \ln x \Big|_3^{\omega} = \\ &= \frac{1}{10} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\ln \ln \omega - \ln \ln 3) = \infty \end{aligned}$$

Az improprius integrál divergens  $\xrightarrow{\text{int. kr.}}$  a  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n^{10}}$  sor is divergens.

b)  $f(x) := \frac{1}{x (\ln \sqrt{x})^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{x (\ln x)^2}, \quad x \geq 3$

$f$  pozitív értékű monoton csökkenő függvény a  $[3, \infty)$  intervallumon  $f(n) = a_n > 0 \implies$  most is alkalmazható az [integrálkritérium](#).

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} 4 \frac{1}{x (\ln x)^2} dx &= 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_3^{\omega} \underbrace{\frac{1}{x (\ln x)^2}}_{f' f^{-2} \text{ alakú}} dx = 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} \Big|_3^{\omega} = \\ &= 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\ln \omega} + \frac{1}{\ln 3} \right) = \frac{4}{\ln 3} \end{aligned}$$

Az improprius integrál konvergens  $\xrightarrow{\text{int. kr.}}$  a  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln \sqrt{n})^2}$  sor is konvergens.

Hibaszámítás az  $s \approx s_{1000}$  közelítésre:

$$\begin{aligned} 0 < H = s - s_{1000} &\leq \int_{1000}^{\infty} 4 \frac{1}{x} (\ln x)^{-2} dx = 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left. \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} \right|_{1000}^{\omega} = \\ &= 4 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\ln \omega} + \frac{1}{\ln 1000} \right) = \frac{4}{\ln 1000} \end{aligned}$$

### Egyéb esetekben (csak pozitív tagú sorokra)

Ha a sor konvergenciáját nem az [integrálkritériummal](#) mutattuk meg, akkor próbálkozhatunk azzal, hogy a hibát megadó  $r_n$  maradékoszeget egy konvergens [geometriai sor](#)  $r_n^*$  maradékoszegével becsljük. Ha pl. a sor konvergenciájára [hányados](#) vagy [gyök-kritériummal](#) következtettünk, akkor a sorhoz mindig található konvergens majoráló geometriai sor.

→

**Pl.** Bizonyítsa be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^{2n+1} + n^2 + n}$$

sor konvergens és adjon becslést az  $s \approx s_{100}$  közelítésnél elkövetett hibára!

**Megoldás.**  $a_n = \frac{3^n + 2}{2 \cdot 4^n + n^2 + n} < \frac{3^n + 3^n}{2 \cdot 4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$  konvergens geometriai sor ( $0 < q = \frac{3}{4} < 1$ )  $\xrightarrow{\text{maj. kr.}}$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergens.

Hibaszámítás az  $s \approx s_{100}$  közelítésre:

$$0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^{2n+1} + n^2 + n} \leq \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{101}}{1 - \frac{3}{4}}$$

**Pl.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

Mutassa meg, hogy a sor konvergens és adjon becslést az  $s \approx s_{100}$  közelítésnél elkövetett hibára!

**Megoldás.** Hányados kritériummal dolgozunk.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+2)! 3^n} = \frac{3}{n+2} \rightarrow 0 < 1$$

$\xRightarrow{\text{hány. kr.}}$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens.

Hibaszámítás az  $s \approx s_{100}$  közelítésre:

$$\begin{aligned} 0 < H &= \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{3^{101}}{102!} + \frac{3^{102}}{103!} + \frac{3^{103}}{104!} + \frac{3^{104}}{105!} + \dots = \\ &= \frac{3^{101}}{102!} \left( 1 + \frac{3}{103} + \frac{3^2}{103 \cdot 104} + \frac{3^3}{103 \cdot 104 \cdot 105} + \dots \right) < \\ &< \frac{3^{101}}{102!} \left( 1 + \frac{3}{103} + \left( \frac{3}{103} \right)^2 + \left( \frac{3}{103} \right)^3 + \dots \right) = \frac{3^{101}}{102!} \frac{1}{1 - \frac{3}{103}} \end{aligned}$$

## 2.6. Műveletek konvergens sorokkal

Ⓓ Ha  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$  és  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$ ,  $S_a, S_b \in \mathbb{R}$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot S_a.$$

**Bizonyítása** az 1.2 fejezetben már megtörtént.

## 2.6.1. Végtelen sorok természetes szorzata

	$a_1$	+	$a_2$	+	$a_3$	+	$a_4$	+	$\dots$	+	$a_k$	+	$\dots$		
$b_1$	$b_1 a_1$	+	$b_1 a_2$	+	$b_1 a_3$	+	$b_1 a_4$	+	$\dots$	+	$b_1 a_k$	+	$\dots$		
+	$b_2$	+	$b_2 a_1$	+	$b_2 a_2$	+	$b_2 a_3$	+	$b_2 a_4$	+	$\dots$	+	$b_2 a_k$	+	$\dots$
+	$b_3$	+	$b_3 a_1$	+	$b_3 a_2$	+	$b_3 a_3$	+	$b_3 a_4$	+	$\dots$	+	$b_3 a_k$	+	$\dots$
+	$b_4$	+	$b_4 a_1$	+	$b_4 a_2$	+	$b_4 a_3$	+	$b_4 a_4$	+	$\dots$	+	$b_4 a_k$	+	$\dots$
+	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
+	$b_k$	+	$b_k a_1$	+	$b_k a_2$	+	$b_k a_3$	+	$b_k a_4$	+	$\dots$	+	$b_k a_k$	+	$\dots$
+	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

A természetes szorzat elemei:

$$t_1 = b_1 a_1, \quad t_2 = b_2 a_1 + b_2 a_2 + b_1 a_2, \quad t_3 = b_3 a_1 + b_3 a_2 + b_3 a_3 + b_2 a_3 + b_1 a_3, \dots$$

A természetes szorzat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k, \quad \text{ahol} \quad \sum_{k=1}^n t_k = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k.$$

Ⓓ Ha  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$  és  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$ , akkor a  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  és  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  sorok természetes szorzata konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) = S_a S_b.$$

(Bizonyítás az előzőek alapján nyilvánvaló.)

## 2.6.2. Végtelen sorok Cauchy-szorzata

	$a_1$	+	$a_2$	+	$a_3$	+	$a_4$	+	$\dots$	+	$a_k$	+	$\dots$
$b_1$	$b_1 a_1$	/	$b_1 a_2$	/	$b_1 a_3$	/	$b_1 a_4$	/	$\dots$	/	$b_1 a_k$	/	$\dots$
+	$b_2 a_1$	/	$b_2 a_2$	/	$b_2 a_3$	/	$b_2 a_4$	/	$\dots$	/	$b_2 a_k$	/	$\dots$
+	$b_3 a_1$	/	$b_3 a_2$	/	$b_3 a_3$	/	$b_3 a_4$	/	$\dots$	/	$b_3 a_k$	/	$\dots$
+	$b_4 a_1$	/	$b_4 a_2$	/	$b_4 a_3$	/	$b_4 a_4$	/	$\dots$	/	$b_4 a_k$	/	$\dots$
+	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$
+	$b_k a_1$	/	$b_k a_2$	/	$b_k a_3$	/	$b_k a_4$	/	$\dots$	/	$b_k a_k$	/	$\dots$
+	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$	/	$\vdots$

A Cauchy-szorzat elemei:

$$c_1 = b_1 a_1,$$

$$c_2 = b_1 a_2 + b_2 a_1,$$

$$c_3 = b_1 a_3 + b_2 a_2 + b_3 a_1,$$

$\dots,$

$$c_n = b_1 a_n + b_2 a_{n-1} + b_3 a_{n-2} + \dots + b_n a_1 \quad (\text{indexek összege } n + 1).$$

A Cauchy-szorzat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k+1}.$$

Ⓓ Ha  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  és  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  *abszolút konvergens* sorok és  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$ ,  
akkor a  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  és  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  *Cauchy-szorzata is abszolút konvergens*, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S_a S_b, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k+1}.$$

(−B)

Ⓓ  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \frac{1}{1-x}$ , ha  $|x| < 1$ .

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^k x^k + \dots = \frac{1}{1+x}$ , ha  $|x| < 1$ .

Írjuk fel a fenti két sor Cauchy-szorzatát!

Megoldás.

		1	+	$x$	+	$x^2$	+	$x^3$	+	$\dots$	+	$x^k$	+	$\dots$
1		1		$x$		$x^2$		$x^3$		$\dots$		$x^k$		$\dots$
+		$-x$		$-x^2$		$-x^3$		$-x^4$		$\dots$		$-x^{k+1}$		$\dots$
+		$x^2$		$x^3$		$x^4$		$x^5$		$\dots$		$x^{k+2}$		$\dots$
+		$-x^3$		$-x^4$		$-x^5$		$-x^6$		$\dots$		$-x^{k+3}$		$\dots$
+		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
+		$(-1)^k x^k$		$\dots$		$\dots$		$\dots$		$\dots$		$\dots$		$\dots$
+		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Cauchy-szorzat:

$$1 + 0 + x^2 + 0 + x^4 + 0 + x^6 + \dots = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2k} + \dots = \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 + x}, \text{ ha } |x| < 1.$$

**(Pl.)** Házi feladat:

Határozzuk meg a  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$  és  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = e^y$  sorok Cauchy-szorzatát!

**(M)**  $e^x \cdot e^y = e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$  eredményt kell kapni.

### 2.6.3. Zárójelek elhelyezése, illetve elhagyása végtelen sor esetén

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$$

A fenti sor részletösszegei:

$s_1 = a_1$ ,  $s_2 = a_1 + a_2$ ,  $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ,  $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ,  $s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \dots$  stb. Az

$$a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_4 + a_5)}_{a_3^*} + a_6 + \dots$$



bezárójelezett új sor részletösszegei

$$s_1^* = a_1, s_2^* = a_1 + a_2, s_3^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, s_4^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6, \dots$$

Zárójelek elhelyezése esetén a részletösszegek sorozata szűkül. Ha a sor konvergens volt, akkor zárójelek behelyezése esetén is konvergens marad. Előfordulhat, hogy divergens sorból – zárójelek elhelyezése után – konvergens sor lesz.

$$\text{Pl. } (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - \dots)$$

Véges sok zárójel elhelyezése nem befolyásolja a konvergenciát!

Zárójelek elhagyása után a részletösszegek sorozata bővül. Ha a sor divergens volt, akkor zárójelek elhagyása esetén is divergens marad. Előfordulhat, hogy konvergens sorból – zárójelek elhagyása után – divergens sor lesz. Véges sok zárójel elhagyása nem befolyásolja a konvergenciát!

#### 2.6.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_k + \dots$$

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_{100} + a_5 + a_6 + \dots + a_{99} + a_4 + a_{101} + \dots$$

Véges sok elem felcserélése nem változtatja meg a konvergencia vagy divergencia tényét, nem változik meg a sorösszeg sem. Végtelen sok elemcsere megváltoztathatja a sorösszeget, **feltételesen konvergens** sor átrendezhető akár divergenssé is.

**(T)** Ha  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergens és  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  divergens, akkor  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  átrendezhető úgy, hogy divergens legyen, és átrendezhető úgy is, hogy egy előre tetszőlegesen megadott szám legyen az összege.

(Nem bizonyítjuk.)

**(T)** Ha  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **abszolút konvergens**, akkor tetszőleges átrendezése is abszolút konvergens, az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.

(Nem bizonyítjuk.)

## 2.7. Feladatok sorokhoz

$$1. \quad \text{a) } \sum_2^{\infty} \frac{3^{k+1} + 2^{2k+1}}{5^k} = ?$$

$$\text{b) } \sum_1^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = ?$$

$$c) \sum_1^{\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}} = ?$$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}$$

$$b) \sum_1^{\infty} \frac{\binom{n}{n+1}^n n^3 + 1}{n^5 + 1}$$

$$c) \sum_1^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 + 5}}$$

$$d) \sum_1^{\infty} \frac{5^n}{(2n + 3)!}$$

$$e) \sum_1^{\infty} \frac{n^{n-1}}{3n + 1}$$

$$f) \sum_1^{\infty} \frac{3^n}{n 4^{n+1}}$$

$$g) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n + 2^n}$$

$$h) \sum_1^{\infty} \frac{2n + 1}{2^n + n}$$

$$i) \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$j) \sum_2^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$k) \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{7^{3n+2}}$$

$$l) \sum_1^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{(3n)!}$$

$$m) \sum_1^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^n$$

$$n) \sum_1^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n + 6^n}$$

$$o) \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$$

$$p) \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 5}$$

$$q) \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3 + 5}$$

$$r) \sum_{10}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n - \sqrt{n^2 - \sqrt{n} + 3}}$$

$$s) \sum_1^{\infty} \left( 1 - \frac{\sqrt{5}}{3n} \right)^n$$

$$t) \sum_1^{\infty} \frac{10^n}{n! n^2}$$

$$u) \sum_1^{\infty} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{n} \right)^{n^2+n}$$

$$v) \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{\left( 4 + \frac{2}{n^2} \right)^n}$$

$$w) \sum_1^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$x) \sum_1^{\infty} \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2}$$

$$y) \sum_1^{\infty} \left( \frac{n}{n^2+1} \right)^{n^2}$$

$$z) \sum_1^{\infty} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$$

3. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét  $10^{-3}$ -nál kisebb hibával! Lásd [itt](#) és [itt](#).

$$\text{a) } \sum_1^{\infty} \left( \frac{n^2}{2n^2 + 1} \right)^n$$

$$\text{b) } \sum_2^{\infty} \frac{1}{(2n)! - n!}$$

$$\text{c) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n + 10^n}$$

$$\text{d) } \sum_1^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n + 5}$$

$$\text{e) } \sum_1^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\text{f) } \sum_1^{\infty} \frac{n! 3^n}{(2n)!}$$

4. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 10. részletösszegével közelítjük? Lásd [itt](#) és [itt](#).

$$(s \approx s_{10}; \quad H = r_{10} = \sum_{k=11}^{\infty} a_k; \quad |H| \leq ?)$$

$$\text{a) } \sum_1^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{2}}$$

$$\text{b) } \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3^n}$$

$$\text{c) } \sum_1^{\infty} \left( \frac{n+1}{3n+1} \right)^n$$

$$\text{d) } \sum_1^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

$$\text{e) } \sum_1^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n} + n^2 + 3}$$

$$\text{f) } \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n^2 + n}$$

5. Abszolút, illetve feltételesen konvergense az alábbi sor?

a)  $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n+4}{n^2+4}$

b)  $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log_2 n^2}$

c)  $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8}$

d)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^n} + \dots$

e)  $\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} + \dots$

f)  $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2^n} - \dots$

g)  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \dots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \dots$

h)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2^n} + \dots$

## 2.8. Számsorozatok nagyságrendje

Ⓓ  $a_n = O(b_n)$  („nagy ordó  $b_n$ ”), ha  $\exists c_1$  :  
 $|a_n| \leq c_1 |b_n|, \quad n > N$  (legfeljebb véges sok kivétellel)

Ⓓ  $a_n = \Omega(b_n)$  („omega  $b_n$ ”), ha  $b_n = O(a_n)$ .

Vagyis  $|b_n| \leq c_1 |a_n| \quad n > N \quad (\exists c_1)$ .

Ekkor:  $c_2 |b_n| = \frac{1}{c_1} |b_n| \leq |a_n|$ , vagyis most  $|a_n|$  alulról becsülhető  $|b_n|$  segítségével.

Ⓓ  $a_n = \Theta(b_n)$  („teta  $b_n$ ”), ha  $a_n = O(b_n)$  és  $a_n = \Omega(b_n)$ .

Ilyenkor azt mondjuk, hogy  $a_n$  és  $b_n$  azonos nagyságrendű  
 Az előzőből következik:

Ⓓ  $a_n = \Theta(b_n) \iff c_2 |b_n| \leq |a_n| \leq c_1 |b_n|$

Ⓓ  $a_n = 2n^2 - n + 3$

- Megoldás.** 1.  $a_n = O(n^2)$ , mert  $2n^2 - n + 3 \leq 2 \cdot n^2$ , ha  $n \geq 3$ . Persze  $a_n = O(n^3)$  is igaz, sőt általánosságban:  $a_n = O(n^{2+\alpha})$ ,  $\alpha \geq 0$ .
2.  $a_n = \Omega(n^2)$ , mert  $1 \cdot n^2 = 2n^2 - n^2 \leq 2n^2 - n + 3$ . Sőt  $a_n = \Omega(n^{2-\alpha})$ ,  $\alpha \geq 0$ .
3. Tehát  $a_n = \Theta(n^2)$ .

### 2.8.1. Műveletek $\Theta$ -val

$$\textcircled{\mathbf{T}} \quad \left. \begin{array}{l} a_n, b_n, c_n, d_n > 0 \\ \\ a_n = \Theta(c_n) \\ b_n = \Theta(d_n) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad a_n \cdot b_n = \Theta(c_n \cdot d_n) \\ 2. \quad \frac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\frac{c_n}{d_n}\right) \\ 3. \quad a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \end{array} \right.$$

Különbségre nem igaz!

$\textcircled{\mathbf{M}}$  Akkor van értelme használni ezt, ha  $c_n$  és  $d_n$  sokkal „egyszerűbb” sorozatok.

$\textcircled{\mathbf{B}}$

$$0 < \alpha_1 c_n \leq a_n \leq \alpha_2 c_n, \quad \text{mert } a_n = \Theta(c_n)$$

$$0 < \beta_1 d_n \leq b_n \leq \beta_2 d_n, \quad \text{mert } b_n = \Theta(d_n)$$

1. Azonos értelmű egyenlőtlenségek összesorozhatók:

$$(\alpha_1 \beta_1) c_n d_n \leq a_n b_n \leq (\alpha_2 \beta_2) c_n d_n \implies a_n b_n = \Theta(c_n d_n)$$

2.

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \alpha_1 c_n \leq a_n \leq \alpha_2 c_n \\ 0 < \frac{1}{\beta_2} \frac{1}{d_n} \leq \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{d_n} \end{array} \right\} \implies \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \frac{c_n}{d_n} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \left( \frac{\alpha_2}{\beta_1} \right) \frac{c_n}{d_n},$$

$$\text{tehát } \frac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\frac{c_n}{d_n}\right)$$

3.

$$\alpha(c_n + d_n) \leq \alpha_1 c_n + \beta_1 d_n \leq a_n + b_n \leq \alpha_2 c_n + \beta_2 d_n \leq \beta(c_n + d_n)$$

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \beta = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$$

$$\implies a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \quad \blacksquare$$

$$\text{Pl. } a_n = \sqrt{2n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} = ?$$

$$\begin{aligned} \text{Megoldás. } a_n &= \frac{n^2 + 4n}{\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \\ &= \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n) + \Theta(n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n+n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)} = \Theta\left(\frac{n^2}{n}\right) = \Theta(n) \implies a_n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{Pl. } a_n = \sqrt{7n^2 - 2n + 10} - \sqrt{7n^2 - 2n + 3} = ?$$

$$\text{Megoldás. } a_n = \frac{10 - 3}{\sqrt{7n^2 - 2n + 10} + \sqrt{7n^2 - 2n + 3}} = \frac{\Theta(1)}{\Theta(n+n)} = \Theta\left(\frac{1}{n}\right) \implies a_n \rightarrow 0$$

### 2.8.2. Aszimptotikus egyenlőség ( $a_n \sim b_n$ )

Ⓓ  $a_n$  aszimptotikusan egyenlő  $b_n$ -nel, jelben  $a_n \sim b_n$ , ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\text{Pl. } \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \text{ mert } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\text{Pl. } n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{Stirling-formula } (\neg B)$$

Ⓙ  $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left. \begin{array}{l} a_n \sim c_n \\ b_n \sim d_n \end{array} \right\} \implies \begin{cases} 1. & a_n + b_n \sim c_n + d_n \\ 2. & a_n b_n \sim c_n d_n \\ 3. & \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{c_n} \\ 4. & \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{d_n}{c_n} \end{cases}$$

Megint nincs különbség!

ⓑ

$$a_n \sim c_n : \frac{a_n}{c_n} \rightarrow 1 \implies 0 < 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{c_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N_1$$

$$b_n \sim d_n : \frac{b_n}{d_n} \rightarrow 1 \implies 0 < 1 - \varepsilon < \frac{b_n}{d_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N_2$$

Legyen  $n > \max\{N_1, N_2\} = N$

$$1. \quad 1 - \varepsilon = \frac{(1 - \varepsilon)c_n + (1 - \varepsilon)d_n}{c_n + d_n} < \frac{a_n + b_n}{c_n + d_n} < \frac{(1 + \varepsilon)c_n + (1 + \varepsilon)d_n}{c_n + d_n} = 1 + \varepsilon, \\ \text{ha } n > N$$

2.  $\neg B$

$$3. \quad \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{c_n}} = \frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{c_n}} \rightarrow 1$$

$$4. \quad \text{Az előző kettőből következik: } a_n \sim c_n \implies \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{c_n}; \text{ másrészt } b_n \sim d_n \\ \implies \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{d_n}{c_n} \quad \blacksquare$$

$$\text{Pl. } a_n = \sqrt[3]{2n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7} = ?$$

Megoldás.

$$a_n = \frac{2n^2 + n + 1 - (2n^2 - 3n - 7)}{(\sqrt[3]{2n^2 + n + 1})^2 + \sqrt[3]{2n^2 + n + 1}\sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7} + (\sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7})^2} \sim \\ \sim \frac{4n}{(\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}})^2 + (\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}})^2 + (\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}})^2} = \frac{4n}{\sqrt[3]{4} \cdot 3n^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}} \implies a_n \rightarrow 0$$

$$\text{Pl. } a_n = \frac{\arctg \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7}} = ?$$

Megoldás.

$$a_n \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}} = \text{konst} \cdot \sqrt[3]{n} \rightarrow \infty$$

$$\text{Pl. } a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = ?$$

Megoldás.

$$a_n \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{4^n} \rightarrow 0$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \binom{2n}{n} = ?$$

**Megoldás.** Az előző példa felhasználásával:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \quad \left( = \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

$$\textcircled{\text{M}} a_n \sim b_n \not\Rightarrow (a_n)^n \sim (b_n)^n \quad \text{Pl. } 1 + \frac{1}{n} \sim \sqrt[n]{2}, \text{ de } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & e \end{array}$$

Persze  $a_n \sim b_n$  esetén  $a_n^k \sim b_n^k, k \in \mathbb{N}^+$  már igaz ( $k \neq f(n)$ ). ( $k$  valós is lehet)

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \implies \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k \rightarrow 1\right)$$

És igaz a következő tétel is:

$$\textcircled{\text{T}} \quad a_n, b_n > 0 \quad a_n \sim b_n \implies \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$$

$$\textcircled{\text{B}} a_n \sim b_n \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \implies 0 < 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$$

$$\implies \sqrt[n]{1 - \varepsilon} < \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} < \sqrt[n]{1 + \varepsilon} \implies \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} \rightarrow 1 \quad \blacksquare$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \sqrt[n]{\frac{3n^2 - n\sqrt{n} + 6}{2n^2 + 3n + 7}} \sim \sqrt[n]{\frac{3}{2}} \sim 1$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \text{Határozza meg } A \text{ és } \alpha \text{ értékét úgy, hogy } \cos \frac{1}{n} - 1 \sim An^\alpha \text{ teljesüljön!}$$

**Megoldás.** 1. megoldás:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{An^\alpha} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{n^\alpha} = A \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0\text{-ra } A = 0 \text{ lenne} \\ \alpha > 0\text{-ra } \frac{0}{\infty} \rightarrow 0 = A \text{ lenne} \end{array} \right\} \implies \alpha < 0$$



$$u := \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \underbrace{\frac{\cos u - 1}{u^{-\alpha}}}_{\text{0 alakú } (-\alpha > 0)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{u \rightarrow +0} \frac{-\sin u}{-\alpha u^{-\alpha-1}} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\sin u}{u^{-\alpha-1}} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = A$$

$$\text{ha } -\alpha - 1 = 1 \implies \alpha = -2, A = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Tehát } \cos \frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$$

2. megoldás:

$$\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2} \text{ azonosság segítségével: } \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{An^\alpha} = \frac{-2 \sin^2 \frac{1}{2n}}{An^\alpha} \rightarrow 1, \text{ ha}$$

$$An^\alpha = -2 \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \rightarrow A = -\frac{1}{2}, \alpha = -2$$

**Feladat:**

Határozza meg  $A$  és  $\alpha$  értékét úgy, hogy  $\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sim An^\alpha$  fennálljon!

Ⓓ  $a_n > 0, b_n > 0$   
 $a_n \sim b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  és  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  egyidejűleg konvergens, illetve divergens  
 (Jelben:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ )

Ⓑ  $a_n \sim b_n \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 \implies 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$ . Legyen  $\varepsilon < 1$ .

Tehát  $c_1 b_n < a_n < c_2 b_n$  ( $c_1 = 1 - \varepsilon > 0$ ,  $c_2 = 1 + \varepsilon$ )

Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergens, akkor  $b_n < \frac{1}{c_1} a_n$  miatt  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  is konvergens (majoráns kritérium)

Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergens, akkor  $\frac{1}{c_2} a_n < b_n$  miatt  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  is divergens (minoráns kritérium)

Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergens, akkor  $a_n < c_2 b_n$  miatt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  is konvergens (majoráns kritérium)

Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergens, akkor  $c_1 b_n < a_n$  miatt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  is divergens (minoráns kritérium) ■

Ⓐ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**Megoldás.**  $a_n \sim \frac{1}{3n^2} = b_n$  és  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergens  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergens

$$\textcircled{\text{Pl.}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n + \sqrt[3]{n} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Megoldás.**  $a_n \sim \frac{1}{7n} = b_n$  és  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergens  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergens

$$\textcircled{\text{Pl.}} \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Megoldás.**  $a_n \sim \frac{1}{n} = b_n$  és  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergens  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergens

$$\textcircled{\text{Pl.}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Megoldás.**  $a_n = 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \sim 2 \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} = b_n$  és  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergens  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergens

### Feladatok:

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \arctg \frac{1}{n} \right)$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{ch} \frac{2}{n} - \cos \frac{3}{n} \right)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$$

$$\textcircled{\text{D}} \quad a_n = o(b_n) \text{ („kis ordó } b_n\text{”), ha } \forall c > 0\text{-ra} \\ |a_n| \leq c |b_n| \quad n > N\text{-re}$$

Más jelölés is használatos:

$$a_n \ll b_n, \text{ ha } a_n = o(b_n)$$

(Nagyságrendileg kisebb vagy lényegesen kisebb.)

A definíció következménye, hogy  $b_n \neq 0$  esetén  $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq c, \quad n > N \quad \forall c > 0$ -ra. Ebből persze már következik, hogy ekkor  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N_0(\varepsilon)$ , hogy  $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon$ , ha  $n > N_0(\varepsilon)$ .

Nyilvánvalóan igaz az alábbi állítás is:

$$\textcircled{T} \quad a_n = o(b_n), \quad b_n \neq 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

**Pl.** Mit jelent  $a_n = o(1)$ ?

**Megoldás.** Mivel  $\forall c > 0$ -ra  $|a_n| \leq c$ , ha  $n > N$ , ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

A következő állítás is könnyen bizonyítható lenne:ű

$$\textcircled{M} \quad a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + o(1)).$$

**Pl.** Mutassuk meg, hogy  $n! = o(n^n)$ !

**Megoldás.** Be kell látni, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

1. megoldás:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} < \frac{1}{n} \quad + \text{rendőrelv}$$

2. megoldás:

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \rightarrow 0$$

## 3. fejezet

# Egyváltozós valós függvények határértéke és folytonossága

### 3.1. Függvény határértéke

Thom<sub>1</sub>  
⇒

Ⓓ Függvény: egyértékű reláció.

$f : D_f \rightarrow R_f \quad \forall x \in D_f \subset \mathbb{R}$ -hez hozzárendel pontosan egy  $y \in R_f \subset \mathbb{R}$ -et.  
( $y = f(x)$ )

$D_f$ : domain, értelmezési tartomány (ÉT);  $R_f$ : range, értékkészlet (ÉK).

(Jelöljük  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  módon is.)

Néhány definíció és példa:

Ⓓ  $f$  felülről korlátos, ha  $\exists K \in \mathbb{R}$ , amire  $f(x) \leq K \quad (x \in D_f)$ , vagy másképp  $R_f \subset (-\infty, K]$ .

Ⓓ  $f$  alulról korlátos, ha  $\exists K \in \mathbb{R}$ , amire  $f(x) \geq -K \quad (x \in D_f)$ , vagy másképp  $R_f \subset [-K, \infty)$ .

Ⓓ  $f$  korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz  $\exists K \in \mathbb{R}$ , amire  $|f(x)| \leq K \quad (x \in D_f)$ , vagy másképp  $R_f \subset [-K, K]$ .

Ⓓ  $f$  monoton nő, ha  $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in D_f)$ .

Ⓓ  $f$  szigorúan monoton nő, ha  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in D_f)$ .

---

<sup>1</sup>lásd Thomas 02-es bemutató 1. és 3. fejezet (3-13. és 25-36. oldal).

Ⓓ  $f$  monoton csökken, ha  $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$  ( $x_1, x_2 \in D_f$ ).

Ⓓ  $f$  szigorúan monoton nő, ha  $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$  ( $x_1, x_2 \in D_f$ ).

Ⓓ  $f$  periodikus  $p > 0$  periódussal, ha  $f(x+p) = f(x)$  ( $x \in D_f$ ). (Ehhez persze az is kell, hogy  $x \in D_f \implies x+p \in D_f$ , azaz  $D_f + p \subset D_f$  teljesüljön.)

Ⓓ  $f$  páros, ha  $f(-x) = f(x)$  ( $x \in D_f$ ). (Ehhez persze az is kell, hogy  $x \in D_f \implies -x \in D_f$ , azaz  $-D_f \subset D_f$  teljesüljön.)

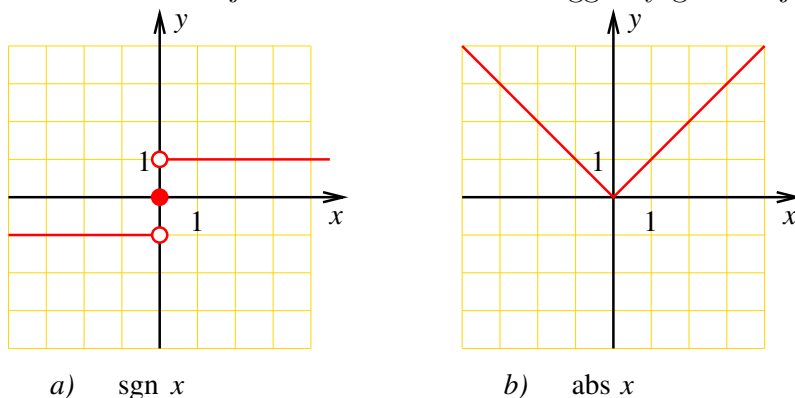
Ⓓ  $f$  páratlan, ha  $f(-x) = -f(x)$  ( $x \in D_f$ ). (Ehhez persze az is kell, hogy  $x \in D_f \implies -x \in D_f$ , azaz  $-D_f \subset D_f$  teljesüljön.)

Ⓐ Az előjel (signum) függvény (3.1.a) ábra):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az előjel függvény korlátos (pl.:  $K = 1$ ), monoton nő, de nem szigorúan, nem periodikus, és páratlan.

3.1. ábra. Az előjel és az abszolútérték függvény grafikonja



**P1.** Az abszolútérték függvény (3.1.b) ábra):

$$|x| = \text{abs } x = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az abszolútérték függvény alulról korlátos (pl.:  $K = 0$ ), de felülről nem, így nem korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, nem periodikus, és páros.

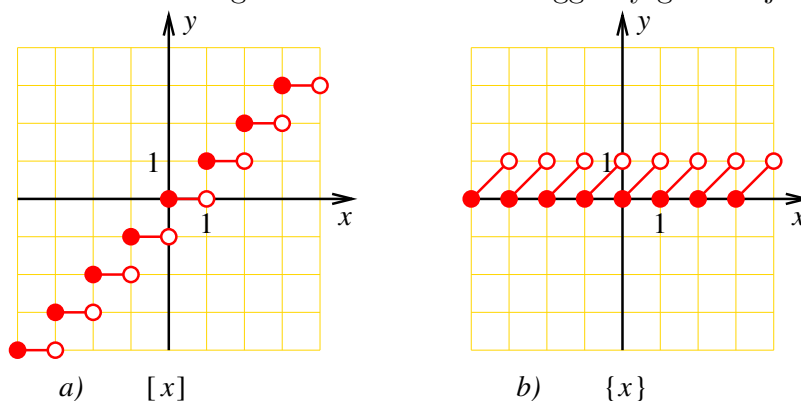
**P1.** Az egészrész függvény (3.2.a) ábra):

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$

Tehát  $[x]$  az  $x$ -nél nem nagyobb legnagyobb egész szám. Pl.  $[1.9] = 1$ ,  $[-1.1] = -2$ .

Az egészrész függvény alulról sem és felülről sem korlátos, így nem korlátos. Monoton nő, de nem szigorúan, nem periodikus, és se nem páros, se nem páratlan.

3.2. ábra. Az egészrész és a törtrész függvény grafikonja



**P1.** A törtrész függvény (3.2.b) ábra):

$$\{x\} = x - [x]$$

A törtrész függvény alulról korlátos (pl.:  $K = 0$ ), és felülről is (pl.:  $K = 1$ ), így korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, periodikus ( $p = 1$ ), és se nem páros, se nem páratlan.

Ⓟ Dirichlet függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

A Dirichlet függvény alulról korlátos (pl.:  $K = 0$ ), felülről korlátos (pl.:  $K = 1$ ), így korlátos. Semmilyen értelemben nem monoton, minden pozitív, racionális  $p$ -vel periodikus, így nincs legkisebb periódusa, és páros.

**Néhány definíció:**

Ⓟ Az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pont a  $H \subset \mathbb{R}$  halmaz torlódási pontja, ha  $x_0$  minden környezete a  $H$  végtelen sok elemét tartalmazza.

**Környezet fogalma:**

Ⓟ Az  $x_0$  pont  $\delta$  sugarú környezete:

Ha  $x_0 \in \mathbb{R}$  és  $\delta > 0$ , akkor

$$K_{x_0, \delta} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Ⓟ Az  $x_0$  pont  $\delta$  sugarú pontozott környezete:

$$\dot{K}_{x_0, \delta} = K_{x_0, \delta} \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

Ha  $\delta$ -nak nincs szerepe, akkor a jelölésben sem tüntetjük fel:  $K_{x_0}$ ,  $\dot{K}_{x_0}$ .

$$|x - x_0| < r \iff x \in K_{x_0, r}.$$

**Végesben vett véges határérték definíciója**

App  
⇒  
App  
⇒

Ⓟ Azt mondjuk, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , ha

- $x_0$  torlódási pontja  $D_f$ -nek,
- $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ , hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad x \in D_f$$

(Azaz  $f(x) \in K_{A, \varepsilon}$ , ha  $x \in \dot{K}_{x_0, \delta} \cap D_f$ )

$H$  halmazra szorítkozó határérték:

az előző definícióban a  $D_f \rightarrow D_f \cap H$  helyettesítést elvégezve kapjuk a definícióját.

Jobb oldali határérték:  $H = (x_0, \infty)$

$$\text{Jelölése: } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0 + 0)$$

Bal oldali határérték:  $H = (-\infty, x_0)$

$$\text{Jelölése: } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$$

A definíciókból következően az értelmezési tartomány  $x_0$  belső pontjában  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  akkor és csak akkor létezik, ha  $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$  és  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$  (véges).

**(T) Cauchy-kritérium** ( $\neg B$ )

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x_1, x_2 \in \dot{K}_{x_0, \delta} \text{ esetén } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

**(Pl.)** Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x^2 - 4}{x + 2} - 3x - 1 \right) = 3$

**Megoldás.** Be kell látnunk, hogy  $\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$

$$|f(x) - 3| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x + 2| < \delta(\varepsilon)! \quad \delta(\varepsilon) = ?$$

$$|f(x) - 3| = \left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} - 3x - 1 - 3 \right| \stackrel{x \neq -2}{=} |x - 2 - 3x + 1 - 3| = |-2x - 4| =$$

$$= |(-2)(x + 2)| = 2|x + 2| < \varepsilon \implies |x + 2| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

**(Pl.)** Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{x \rightarrow 27} \sqrt[3]{x} = 3$

**Megoldás.**  $|f(x) - 3| < \varepsilon, , \text{ ha } 0 < |x - 27| < \delta(\varepsilon) \quad \delta(\varepsilon) = ?$

$$|\sqrt[3]{x} - 3| = \left| (\sqrt[3]{x} - 3) \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 3^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 3^2} \right| = \frac{|x - 27|}{\left| \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 9 \right|} \underset{x > 0}{<} \frac{|x - 27|}{9} < \varepsilon$$

Innen  $|x - 27| < 9\varepsilon$ , így  $\delta(\varepsilon) \leq \min\{9\varepsilon, 27\}$

(27 az  $x > 0$  megkötésből származik.)



**Pl.** Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 5) = 11$

**Megoldás.**  $|f(x) - 11| < \varepsilon$ , ha  $0 < |x - 3| < \delta(\varepsilon)$   $\delta(\varepsilon) = ?$

$$|x^2 - x + 5 - 11| = |x^2 - x - 6| = |x - 3||x + 2| < |x - 3| \cdot 6 < \varepsilon$$

$$|x - (-2)| < 6$$

$$-8 < x < 4$$

Tehát  $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{6}$ , vagyis  $\delta(\varepsilon) \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6}, 1 \right\}$

(A vizsgálatot leszűkítettük a  $(-8, 4)$  intervallumra. A vizsgált  $x_0 = 3$  pontnak ezen intervallum végpontjaitól való minimális távolsága 1, tehát  $\delta$  nem lehet 1-nél nagyobb. Ezért került be a képletbe 1.)

**Pl.** Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 1}{1 - x} = -1$

**Megoldás.**  $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ , ha  $0 < |x - (-2)| < \delta(\varepsilon)$

$$\left| \frac{2x + 1}{1 - x} + 1 \right| = \left| \frac{2x + 1 + 1 - x}{1 - x} \right| = \frac{|x + 2|}{|x - 1|} < \frac{|x + 2|}{1} < \varepsilon$$

$$|x - 1| > 1$$

$$(x < 0) \vee (x > 2)$$

Tehát  $|x + 2| < \varepsilon$ , vagyis  $\delta(\varepsilon) \leq \min \{ \varepsilon, 2 \}$   
(2:  $-2$  távolsága 0-tól.)

### Feladatok:

Gy  
→

A definícióval mutassa meg, hogy

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 5} = 3$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = 3$

3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}$

4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{3 + x} = -\frac{1}{2}$

•••

### 3.1.1. Szükséges és elégséges tétel határérték létezésére

Átviteli elv:

Ⓓ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \iff \quad \begin{array}{l} \forall x_n \rightarrow x_0\text{-ra } f(x_n) \rightarrow A \\ x_n \in D_f \\ x_n \neq x_0 \end{array}$$

(*P állítás*)

(*Q állítás*)

Ⓔ

1. Szükségesség ( $P \implies Q$ ):

Teljesül:  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , ha  $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Be kell látni:

$f(x_n) \rightarrow A$ , tehát  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N(\varepsilon)$ :  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ , ha  $n > N(\varepsilon)$

Algoritmus:

$\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon)$ :  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , ha  $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon) \rightarrow N_1(\delta(\varepsilon))$ :  $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ , ha  $n > N_1(\delta(\varepsilon))$

De ekkor  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ , ha  $n > N_1(\delta(\varepsilon)) \implies N(\varepsilon) := N_1(\delta(\varepsilon))$

2. Elégségesség ( $Q \implies P$ , ezzel ekvivalens  $\neg P \implies \neg Q$ ):

$\forall x_n \rightarrow x_0$ -ra  $f(x_n) \rightarrow A$ .

Következik-e ebből, hogy  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta(\varepsilon)$ :

$|f(x) - A| < \varepsilon$ , ha  $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$  ?

Indirekt módon bizonyítunk.

Tfh.  $\exists \varepsilon > 0$ , melyhez nincs  $\delta(\varepsilon)$ . Tehát minden  $\delta$  rossz. Pl.  $\delta = \frac{1}{m}$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ ) is

rossz, tehát  $\exists x_m$ :  $0 < |x_m - x_0| < \frac{1}{m}$ , de  $|f(x_m) - A| \geq \varepsilon$ . De ekkor lenne olyan  $x_m \rightarrow x_0$  pontsorozat, amelyre  $f(x_m) \not\rightarrow A$   $\blacksquare$

Ⓓ

Legyen  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , és  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Ekkor  $f$ -nek nincs határértéke a  $x_0 = 0$ -ban, még féloldali sem.

**Megoldás.** Csak a jobb oldali határérték létezését cáfoljuk. Legyen

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0+.$$

Ekkor

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0,$$

vagyis az **átviteli elv** miatt csak 0 lehetne a jobb oldali határérték. (És így a határérték is.)

Legyen most

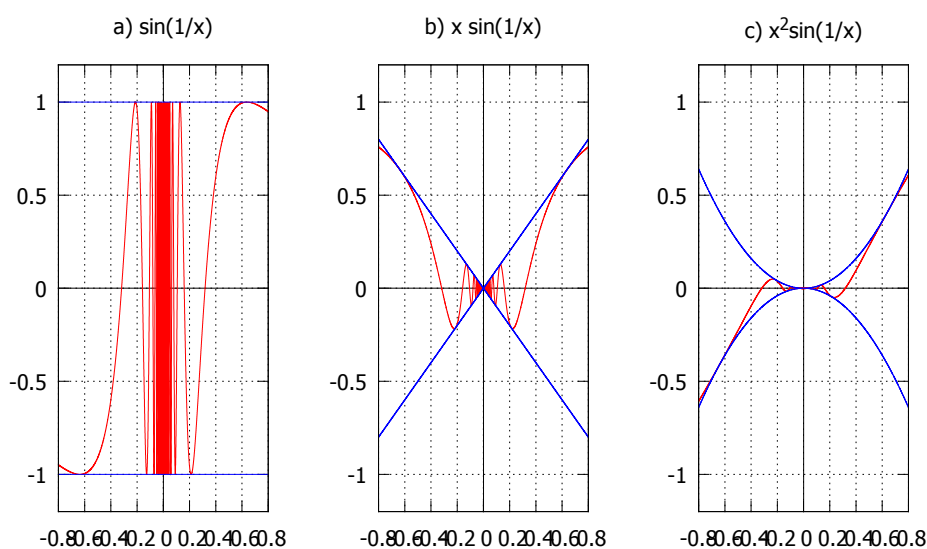
$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 + .$$

Ekkor

$$f(x_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1 \neq 0,$$

így az **átviteli elv** miatt nem létezik jobb oldali határérték. (És így a határérték sem.)

3.3. ábra. A  $\sin(1/x)$  függvény grafikonja



**P1.** Ezzel szemben

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

**Megoldás.** Csak az utóbbit bizonyítjuk. Legyen  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Ha  $x_n \neq 0$  és  $x_n \rightarrow 0$ , akkor

$$-x_n^2 \leq f(x_n) \leq x_n^2$$

így a **rendőrelv** miatt  $f(x_n) \rightarrow 0$ , ami az **átviteli elv** szerint adja az állítást.

(Másik indoklás: mivel  $(0 \cdot \text{korlátos})$  alakú határértékről van szó, a tanult tétel miatt a függvény 0-hoz tart.)

## 3.1.2. Végesben vett határértékek

$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = A \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = A \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon) > 0: \\  f(x) - A  < \varepsilon, \text{ ha} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1. 0 <  x - x_0  < \delta \\ \quad (x \in \dot{K}_{x_0, \delta}) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$
$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists \delta(\Omega) > 0: \\ f(x) > \Omega, \text{ ha} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1. 0 <  x - x_0  < \delta \\ \quad (x \in \dot{K}_{x_0, \delta}) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$
$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = -\infty \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = -\infty \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists \delta(\Omega) > 0: \\ f(x) < -\Omega, \text{ ha} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1. 0 <  x - x_0  < \delta \\ \quad (x \in \dot{K}_{x_0, \delta}) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ \quad (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$

•••

**Pl.**  $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{6 - 2x} = -\infty$

**Megoldás.**

$$\frac{1}{6 - 2x} < -\Omega \implies \frac{1}{2x - 6} > \Omega > 0 \implies 0 < x - 3 < \frac{1}{2\Omega} = \delta(\Omega)$$

**Pl.**  $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{6 - 2x} = +\infty$

**Megoldás.**

$$\frac{1}{6-2x} = \frac{1}{2(3-x)} \underset{3-x > 0}{>} \Omega \implies 2(3-x) < \frac{1}{\Omega} \implies 3-x < \frac{1}{2\Omega} = \delta(\Omega)$$

$$\left( -\delta(\Omega) = -\frac{1}{2\Omega} < x-3 < 0 \right)$$

### 3.1.3. Végtelenben vett határértékek

App  
⇒

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists P(\varepsilon) > 0$ :	$ f(x) - A  < \varepsilon$ , ha $x > P(\varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$	$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists P(\varepsilon) > 0$ :	$ f(x) - A  < \varepsilon$ , ha $x < -P(\varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$	$\forall \Omega > 0$ -hoz $\exists P(\Omega) > 0$ :	$f(x) > \Omega$ , ha $x > P(\Omega)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	$\forall \Omega > 0$ -hoz $\exists P(\Omega) > 0$ :	$f(x) < -\Omega$ , ha $x > P(\Omega)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\forall \Omega > 0$ -hoz $\exists P(\Omega) > 0$ :	$f(x) > \Omega$ , ha $x < -P(\Omega)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall \Omega > 0$ -hoz $\exists P(\Omega) > 0$ :	$f(x) < -\Omega$ , ha $x < -P(\Omega)$

Ⓜ Az **átviteli elv** mindegyik típusra kiterjeszthető. A **rendőrelv** is alkalmazható.

•••

Ⓟ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+3}{2x-1} = \frac{3}{2}$

**Megoldás.**  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , ha  $x < -P(\varepsilon)$

$$\left| \frac{3x+3}{2x-1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{6x+6 - (6x-3)}{4x-2} \right| = \frac{9}{|4x-2|} < \varepsilon \implies |4x-2| > \frac{9}{\varepsilon}$$

$$x < 0 \text{ miatt } -(4x-2) > \frac{9}{\varepsilon} \implies -4x > \frac{9}{\varepsilon} - 2 \implies x < -\frac{\frac{9}{\varepsilon} - 2}{4} = -P(\varepsilon)$$

$$\text{Pl. } \boxed{f(x) = \{x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{x} \neq}$$

**Megoldás.**  $x_n^{(1)} = n \rightarrow \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \quad f(x_n^{(1)}) = 0 \rightarrow 0$   
 $x_n^{(2)} = n + \frac{1}{2} \rightarrow \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \quad f(x_n^{(2)}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$

$$\text{Pl. } \boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\{x\}}{x^2 + 1} = 0}$$

**Megoldás.** A **rendőrelv** segítségével:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leq & \frac{\{x\}}{x^2 + 1} \leq & \frac{1}{x^2 + 1} \\ \downarrow & & & \downarrow \\ 0 & & & 0 \end{array}$$

$$\implies \frac{\{x\}}{x^2 + 1} \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow \pm\infty.$$

•••

### 3.1.4. Feladatok

1. A megfelelő definícióval mutassa meg, hogy

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^2 + 1) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 3}{2x + 4} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{1}{(x - 2)^3} = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x - 1)^2} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{1 + x^2} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 5} = \infty$

2. Mutassa meg, hogy az alábbi határértékek nem léteznek!

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x^2$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sin^2 x]$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , ha  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ rac.} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$

•••

## 3.2. Folytonosság

Thom<sub>2</sub>  
⇒App  
⇒App  
⇒

$x_0$ : az értelmezési tartomány belső pontja ( $\exists K_{x_0} \subset D_f$ )

Ⓓ  $f$  folytonos  $x_0$ -ban, ha  $\exists f(x_0)$  és  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ :

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Ezzel egyenértékű:

$$f \text{ folytonos } x_0\text{-ban, ha } \exists f(x_0), \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left( = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) \right)$$

(Tehát a folytonossági helyeken a határátmenet és a függvényművelet felcserélhető.)

Jobbról folytonos  $f$   $x_0$ -ban, ha :  $f(x_0) = f(x_0 + 0)$

Balról folytonos  $f$   $x_0$ -ban, ha :  $f(x_0) = f(x_0 - 0)$

### 3.2.1. Szakadási helyek osztályozása

App  
⇒

Ha az értelmezési tartomány belső pontjában  $f$  nem folytonos, akkor a szakadás lehet:

#### 1. Elsőfajú szakadás

a) megszüntethető szakadás:  $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$  (véges), de  $\neq f(x_0)$  vagy  $\nexists f(x_0)$

b) véges ugrás:  $\exists$  a véges  $f(x_0 + 0)$  és  $f(x_0 - 0)$ , de  $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$

#### 2. Másodfajú szakadás (lényeges szakadás): minden más szakadási hely

### 3.3. Műveletek függvények körében

Thom<sub>3</sub>  
⇒Thom<sub>4</sub>  
⇒

$$(cf)(x) := c \cdot f(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad f(x) = x^2; \quad g(x) = \sin x \quad (f \circ g)(x) = \sin^2 x; \quad (g \circ f)(x) = \sin x^2$$

#### A határértékekre vonatkozó tételek:

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{T}} \quad & \text{Ha } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}, \text{ akkor} \\ & \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (cf)(x) = c \cdot A \quad (= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) \\ & \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = A + B \\ & \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) \left( = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) \right) = A \cdot B \\ & \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{A}{B}, \text{ ha } B \neq 0 \end{aligned}$$

$\textcircled{\text{B}}$  A számsorozatokra vonatkozó hasonló tételek alapján. Pl. az összegre:  
A feltételek miatt:

$$\begin{aligned} \forall x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \neq x_0, x_n \in D_f) \text{ sorozatra } f(x_n) \rightarrow A, \quad g(x_n) \rightarrow B \\ \implies \forall \text{ ilyen } x_n \rightarrow x_0\text{-ra: } (f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A + B. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$\textcircled{\text{M}}$  A tételek kiterjeszthetők minden határérték fajtára a számsorozatokhoz hasonlóan. Ugyanazok a határozatlan alakok is.

•••

<sup>2</sup>lásd Thomas 02-es bemutató 6. fejezet (75-94. oldal).

<sup>3</sup>lásd Thomas 01-es bemutató 5. fejezet (70-87. oldal).

<sup>4</sup>lásd Thomas 02-es bemutató 2. fejezet (14-24. oldal).



$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)^2}{x - 1} = ?$$

$$\text{Megoldás. } \dots = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{(x - 1)}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{x - 1}{x - 1}}_{\downarrow 1} \underbrace{(x + 1)^2}_{\downarrow 4} = 0$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x^2 - 9)^2} = ?$$

$$\text{Megoldás. } \dots = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} \frac{x - 3}{x - 3} \frac{x - 2}{(x + 3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \underbrace{\frac{1}{x - 3}}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\frac{x - 3}{x - 3}}_{\downarrow 1} \underbrace{\frac{x - 2}{(x + 3)^2}}_{\downarrow \frac{3-2}{6^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \underbrace{\frac{1}{x - 3}}_{\downarrow -\infty} \underbrace{\frac{x - 3}{x - 3}}_{\downarrow 1} \underbrace{\frac{x - 2}{(x + 3)^2}}_{\downarrow \frac{3-2}{6^2}} = -\infty$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x^2 - 9)^2} = ?$$

$$\text{Megoldás. } \dots = \frac{30}{+0} = +\infty$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4 + x} - 2} = ?$$

$$\text{Megoldás. } \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4 + x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{4 + x} + 2}{\sqrt{4 + x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (\sqrt{4 + x} + 2) = 4$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8 + x}{3x^2 + 6} = ?$$

Megoldás.  $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{x}{3x^2}}_{=\frac{1}{3x} \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 + \frac{8}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}}}_{\downarrow 1} = 0$

Pl.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{6 + 3x^2} = ?$

Megoldás.  $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{x^2}{3x^2}}_{=\frac{1}{3}} \underbrace{\frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}}}_{\downarrow 1} = \frac{1}{3}$

Pl.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9 - 2x^2}{3x + 6} = ?$

Megoldás.  $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{-2x^2}{3x}}_{=-\frac{2}{3}x \downarrow \mp\infty} \underbrace{\frac{1 - \frac{9}{2x^2}}{1 + \frac{2}{x}}}_{\downarrow 1} = \mp\infty$

Pl.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^9 + 6x^5 + 2x^2 + 3) = ?$

Megoldás.  $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^9 \underbrace{\left(1 - \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^7} - \frac{3}{x^9}\right)}_{\downarrow 1} = \mp\infty$

Pl.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 + 6x}) = ?$

Megoldás.  $\dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 8 - (x^2 + 6x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 + 6x}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{-3x}{\sqrt{x^2}}}_{=\frac{-3x}{|x|} = \mp 3} \frac{1 - \frac{8}{3x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{6}{x}}} = (\mp 3) \cdot \frac{1}{1 + 1} = \mp \frac{3}{2}$

**A folytonosságra vonatkozó tételek:**

Beláthatók a következő tételek:

Ⓓ Ha  $f$  és  $g$  folytonos  $x_0$ -ban, akkor  
 $c \cdot f$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  és  $g(x_0) \neq 0$  esetén  $\frac{f}{g}$  is folytonos  $x_0$ -ban.

Ⓓ Ha  $g$  folytonos  $x_0$ -ban és  $f$  folytonos  $g(x_0)$ -ban, akkor  $f \circ g$  folytonos  $x_0$ -ban.

**3.4. Racionális függvények****3.4.1. Polinomok (racionális egészfüggvények)**

Ⓓ  $n$ -edfokú polinomnak nevezzük a  

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R} \ (i = 0, 1, \dots, n).$$
függvényt.

Ⓓ  

$$x, \quad x^2, \quad x^n, \quad P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$
mindenütt folytonos.

Ⓑ A folytonosság definíciója:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon): \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

a)  $f_1(x) := x$  :

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon \implies \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

b)  $f_2(x) := x^2$  :

Az alábbi bizonyításnál leszűkítjük a vizsgálatot az  $x_0$  pont 1 sugarú környezetére.  
Ez a  $-x_0$  pont  $r = 2|x_0| + 1$  sugarú környezetébe.

Tehát fennáll, hogy

$$|x + x_0| = |x - (-x_0)| < r = 2|x_0| + 1$$

Így

$$|f_2(x) - f_2(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < |x - x_0| (2|x_0| + 1) < \varepsilon$$

$$\implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \implies \delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}, 1\right\}$$

Ez a  $\delta(\varepsilon)$  minden  $\varepsilon$ -ra megfelel, de most értéke függ  $x_0$ -tól is.

c)  $f_n(x) := x^n$  : teljes indukcióval látjuk be a függvény folytonosságát.  
(A definícióval is dolgozhatnánk, de úgy kissé nehéz a bizonyítás.)

1.)  $n = 1$ -re igaz az állítás, hiszen már beláttuk, hogy  $f_1(x) = x$  folytonos.

2.) Tegyük fel, hogy  $(n - 1)$ -re igaz az állítás, tehát  $f_{n-1}(x) = x^{n-1}$  folytonos.

3.) Igaz-e az állítás  $n$ -re?

Mivel  $f_n(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x = f_{n-1}(x) \cdot x$ , így folytonos, mert két folytonos függvény szorzata.

Tehát a teljes indukció értelmében valóban  $f_n(x) \forall n$ -re folytonos.

d)  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$   $n$ -edfokú polinom (racionális egész függvény), ahol  $a_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

A polinomok mindenütt folytonosak, hiszen véges sok folytonos függvény szorzásával és összeadásával állnak elő.



### Néhány megjegyzés az $n$ -edfokú polinomokról:

- $x_0$  a polinom gyöke, ha  $P_n(x_0) = 0$ .

Ekkor a polinom felírható a következő alakban:

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x),$$

tehát a polinomból kiemelhető az  $(x - x_0)$  gyöktényező.

- Egy  $n$ -edfokú polinomnak pontosan  $n$  darab gyöke van, de lehetnek többszörös gyökei és komplex gyökei is. Ha a polinom valós együtthatójú, akkor a komplex gyökök csak konjugált párban fordulhatnak elő. Ha a konjugált komplex gyökökhöz tartozó gyöktényezőket összeszorozzuk, akkor egy valós együtthatójú másodfokú gyöktényezőt kapunk.

Tehát a valós együtthatójú polinomok mindig felírhatók valós együtthatójú első- és másodfokú gyöktényezők szorzataként.

Például:

$$P_{11}(x) = \underbrace{x^3}_{=(x-0)^3} \cdot (x-1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+4)^2$$

Ennek a polinomnak  $x = 0$  háromszoros gyöke (a gyök multiplicitása 3),  $x = 1$  kétszeres gyöke.

A további gyökök már komplexek:

$+i$  és  $-i$ : az  $(x^2 + 1)$  gyökei,

$+2i$ ,  $+2i$ ,  $-2i$ ,  $-2i$  (két darab kétszeres gyök): az  $(x^2 + 4)^2$  gyökei.

### 3.4.2. Racionális törtfüggvény

Ⓓ

$$f(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (P_n(x) : n - \text{edfokú}, Q_m(x) : m - \text{edfokú polinom})$$

Valódi törtfüggvény, ha  $n < m$ , egyébként áltört. Az áltört polinomosztás segítségével mindig felírható egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként. Mivel a polinomok mindenütt folytonosak, a racionális törtfüggvény is mindenütt folytonos, kivéve a nevezőben levő polinom valós gyökeit, ahol a törtfüggvény nincs értelmezve.

Például:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{(x + 2)^2 (x^2 + 2)}$$

A függvény az  $x = -2$  pont kivételével mindenütt folytonos.

( $x^2 + 2 \geq 0 + 2 = 2$ , tehát ennek nincs valós gyöke.)

## 3.5. Példák és feladatok

Gy  
→

Ⓐ. Milyen szakadása van  $x = 1$ -ben az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9}$$

**Megoldás.**  $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 4)$

A nevezőnek is gyöke  $x = 1$ , ezért kiemelhető belőle  $(x - 1)$ .

$$(x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9) : (x - 1) = x^3 - x^2 + 9x - 9$$

A hányadosnak még mindig gyöke  $x = 1$ , így:  $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1) = x^2 + 9$ .

Tehát  $x \rightarrow 1$ -re

$$f(x) = \frac{1}{\underbrace{x-1}_{\downarrow \pm\infty}} \cdot \frac{x-1}{\underbrace{x-1}_{\equiv 1}} \cdot \frac{(x+1)(x^2-4)}{\underbrace{x^2+9}_{\downarrow -\frac{3}{5}}}$$

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \mp \infty$  :  $x = 1$  másodfajú szakadás

**Pl.** Hol és milyen szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x+2|} + \frac{1}{x+2}, & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{-x^3 + x^2 + 4x - 4}{1-x^2}, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$$

**Megoldás.**  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$x = -2$  :

Ha  $x < -2$  :  $f(x) = \frac{1}{-(x+2)} + \frac{1}{x+2} \equiv 0 \implies f(-2-0) = 0.$

Ha  $-2 < x \leq -1$  :  $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x+2} \implies f(-2+0) = +\infty.$

Így  $x = -2$  lényeges (másodfajú) szakadás.

Ha  $x > -1$  :  $f(x) = \frac{x^2(-x+1) + 4(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x}{1-x} \frac{x^2-4}{1+x}$

$x = 1$  :

$f(1+0) = f(1-0) = -\frac{3}{2}$  :  $x = 1$  megszüntethető szakadás ( $\nexists f(1)$ )

$x = -1$  :

$$f(-1-0) = f(-1) = 2$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1-x}{1-x} \underbrace{(x^2-4)}_{-3} \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{+\infty} = -\infty$$

Tehát  $x = -1$  másodfajú szakadás.

### Feladatok

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+ax+1}) = ? \quad a \in \mathbb{R}, a \geq 0$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt[4]{x^4+ax^2+2} - \sqrt[4]{x^4+bx^2+1}) = ? \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{x}{\{x\}} = ?$
  - $\lim_{x \rightarrow 2 \pm} \frac{x}{\{x\}} = ?$

- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\{\pi x\}}{\{x\}} = ?$
3.  $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} + \frac{1}{x - 2} \right) = ?$
4. a)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 2}}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{3x + 4}} = ?$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt[3]{2x + 1} + 1}{\sqrt{3x + 4} - 1} = ?$
- c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x + 2} - \sqrt[3]{-x}} = ?$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = ?$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt[6]{x - 1}}{1 - \sqrt[4]{x - 1}} = ?$  (Próbálkozzon  $u = \sqrt[12]{x - 1}$  helyettesítéssel!)

5. Milyen típusú szakadásai vannak az

$$\frac{x^2 - x - 20}{|x^2 - 12x + 35| (x + 4)}$$

függvénynek?

6. Milyen típusú szakadása van  $x = -1$ -ben  $f$ -nek?

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4}$$

7. Hol és milyen típusú szakadása van  $f$ -nek?

$$f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 8)(x + 4)}{|x^2 + 3x - 10|(x^2 + 5x + 4)}$$

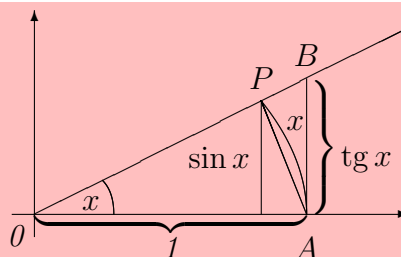
### 3.6. Egy nevezetes határérték

**(T)** A  $\sin(x)$  és  $\cos(x)$  függvények mindenütt folytonosak. ( $\neg B$ )

(A következő határérték számolása közben felhasználjuk a  $\sin$  és  $\cos$  függvények folytonosságát.)

Ⓓ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Ⓔ Mivel  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  páros, elég  $f(+0)$ -val foglalkozni.

Legyen  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  :

$$T_{POA\Delta} < T_{POA\Delta} < T_{OAB\Delta}$$

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{1^2 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$$

Mindkét oldalt  $\frac{2}{\sin x} > 0$ -val megszorozva:

$$\begin{array}{ccc} 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} \quad \blacksquare$$

Ⓕ Tehát  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ -ben  $\sin x < x \Rightarrow |\sin x| \leq |x| \quad \forall x$ -re.

Ⓖ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = ?$

Megoldás.  $\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1^2} = \frac{2}{3}$

Ⓖ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = ?$

Megoldás.  $\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} = \frac{3}{2}$



$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x = ?$$

$$\begin{aligned} \text{Megoldás. } \dots &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \cdot \underbrace{\sin x}_{\downarrow 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} = \lim_{u := x - \frac{\pi}{2}} \frac{-u}{\cos \left( u + \frac{\pi}{2} \right)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u}{\cos \left( u + \frac{\pi}{2} \right)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u}{-\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

## Feladatok

Gy

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = ?$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} = ?$

2.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin \sqrt[4]{x} \sin \sqrt[4]{x^3}}{\sin \pi x} = ?$

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{\sin^2 3x} = ?$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = ?$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = ?$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x} = ?$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = ?$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = ?$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = ?$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = ?$

14.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x} = ?$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = ?$

15.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = ?$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 1 - \cos \frac{1}{x} \right) = ?$

16.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{5}} \frac{1 - \cos 5x}{5x - \pi} = ?$

17. Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \frac{(x^2 + 3x + 2) \sin |2 - x|}{x^2 - 4}$$

függvénynek?

18. Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x+3|} + \frac{1}{x+3}, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}, & \text{ha } 0 < x < 1 \end{cases}$$

...

### 3.7. Folytonos függvények tulajdonságai

Néhány definíció:

- Ⓓ  $f$  folytonos  $(a, b)$ -n, ha  $\forall x \in (a, b)$  -ben folytonos.
- Ⓓ  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n, ha folytonos  $(a, b)$ -n és  $a$ -ban jobbról,  $b$ -ben balról folytonos.
- Ⓓ  $b \in H$  belső pont, ha  $\exists K_b : K_b \subset H$
- Ⓓ  $h$  határpont, ha  $\forall K_h$ -ra  $K_h \cap H \neq \emptyset$  és  $K_h \cap \overline{H} \neq \emptyset$
- Ⓓ  $k$  külső pont, ha  $\exists K_k : K_k \cap H = \emptyset$
- Ⓓ Nyílt halmaz: minden pontja belső pont
- Ⓓ Zárt halmaz: a nyílt halmaz komplementere
- Ⓓ **Kompakt halmaz**  $\mathbb{R}$ -ben: korlátos és zárt halmaz ( $\mathbb{R}^n$ -ben is érvényes a definíció)
- Ⓓ Ha  $f$  *folytonos*  $x_0$ -ban és  $f(x_0) > c$ , akkor  $\exists \delta > 0 : f(x) > c$ , ha  $x \in K_{x_0, \delta}$ .

ⓑ

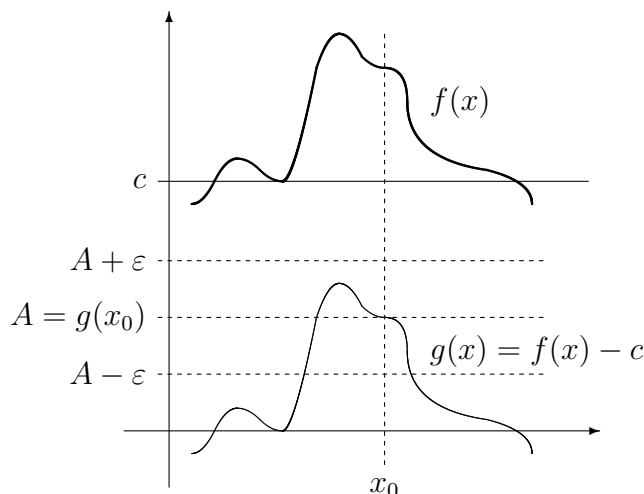
$$g(x) := f(x) - c$$

$g$  is folytonos  $x_0$ -ban és  $g(x_0) > 0$ .

Bizonyítandó, hogy  $\exists K_{x_0, \delta}$ :

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in K_{x_0, \delta}\text{-ra.}$$

$A := g(x_0)$ . A folytonosság miatt:



$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

$$\varepsilon := \frac{A}{2} \longrightarrow \delta\left(\frac{A}{2}\right), \text{ hogy}$$

$$|g(x) - A| < \frac{A}{2}, \text{ azaz } 0 < \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < g(x) \left( < A + \frac{A}{2} \right), \text{ ha } |x - x_0| < \delta\left(\frac{A}{2}\right).$$

$$\text{Tehát itt } g(x) > \frac{A}{2} > 0 \implies f(x) = g(x) + c > c + \frac{A}{2} > c. \quad \blacksquare$$

### 3.7.1. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

App  
⇒

Ⓣ **Bolzano tétel:**

Ha  $f$  **folytonos**  $[a, b]$ -ben, akkor minden  $f(a)$  és  $f(b)$  közé eső  $c$  értéket felvesz  $[a, b]$ -ben.

ⓑ Csak  $f(a) < c < f(b)$  esetre bizonyítunk, azaz belátjuk, hogy létezik  $\xi \in (a, b)$ , amire  $f(\xi) = c$ .

1. lépés:

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) > c \implies a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}, I_1 = [a_1, b_1]$$

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < c \implies a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$$

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = c \implies \xi = \frac{a+b}{2}. \text{ Ekkor vége az eljárásnak. Egyébként}$$

$$f(a_1) < c < f(b_1), \quad [a, b] \supset I_1, \quad |a_1 - b_1| = \frac{|a - b|}{2}$$

2. lépés: Megismételjük az eljárást  $I_1$ -re, így kapunk egy  $I_2 = [a_2, b_2]$  intervallumot:

$f(a_2) < c < f(b_2)$ ,  $[a, b] \supset I_1 \supset I_2$ ,  $|a_2 - b_2| = \frac{|a - b|}{4}$ , vagy megkaptuk  $\xi$  értékét.  
Ha  $\xi$ -t nem kaptuk meg, folytatjuk az eljárást.

$\vdots$

$n$ . lépés:

$f(a_n) < c < f(b_n)$ ,  $[a, b] \supset I_1 \supset \dots \supset I_n$

A Cantor-axióma szerint:  $\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ , és  $|a_n - b_n| = \frac{|a - b|}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$$0 \leq |a_n - \xi| \leq |a_n - b_n| \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi \quad (\text{rendőrelv})$$

$\downarrow$   
0

$$0 \leq |b_n - \xi| \leq |a_n - b_n| \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \quad (\text{rendőrelv})$$

$\downarrow$   
0

$f$  folytonossága és az [átviteli elv](#) alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Másrészt a sorozatok határértékére vonatkozó egyenlőtlenségek alkalmazásával kapjuk:

$$f(a_n) < c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq c$$

$$f(b_n) > c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq c$$

Tehát  $f(\xi) \leq c$  és  $f(\xi) \geq c$ , ami azt jelenti, hogy  $f(\xi) = c$ . ■

**(K<sub>1</sub>)** Ha  $f$  folytonos  $[a, b]$ -ben és  $f(a) f(b) < 0$ , vagyis  $f(a)$  és  $f(b)$  különböző előjelű, akkor az  $f(x) = 0$  egyenletnek legalább egy gyöke van  $(a, b)$ -ben.

Mivel  $c = 0$  az  $f(a)$  és  $f(b)$  függvényértékek közé esik, a Bolzano tétel értelmében  $\exists \xi \in (a, b)$ , hogy  $f(\xi) = 0$ , tehát  $\xi$  gyöke az egyenletnek.

**(K<sub>2</sub>)** Páratlan fokszámú polinomnak legalább egy valós gyöke van.

**(B)** Legyen  $f(x) = a_{2k+1} x^{2k+1} + a_{2k} x^{2k} + \dots + a_1 x + a_0$ , legyen  $a_{2k+1} > 0$ .

$$\implies \left( \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \text{ ezért } \exists \beta : f(\beta) > 1 \right)$$

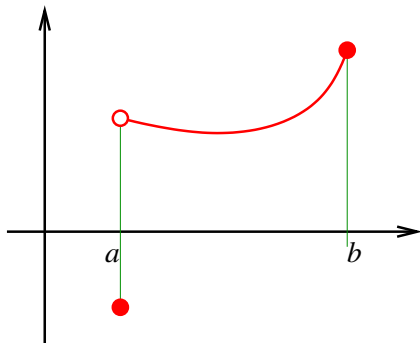
$$\text{és } \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ ezért } \exists \alpha : f(\alpha) < -1 \right).$$

A polinomok folytonosak mindenütt, tehát  $[\alpha, \beta]$ -ban is és  $f(\alpha) f(\beta) < 0$ .

Így az 1. következmény szerint  $\exists \xi \in (\alpha, \beta) : f(\xi) = 0$ . ■

Ⓜ Megjegyezzük, hogy ha a Bolzano tétel feltételei közül akár az intervallum korlátosságát, akár a zártságát elhagyjuk, akkor a tétel érvényét veszti. A 3.4 ábrán látható függvény például az  $(a, b)$  intervallumon folytonos,  $f(a)$  és  $f(b)$  ellentétes előjelű, mégsem veszi föl a függvény a zérus értéket az  $(a, b)$  intervallumon. (A függvény az  $a$  pontban *nem* folytonos.)

3.4. ábra. Az  $a$  pontban nem folytonos függvényre nem teljesül a Bolzano tétel



### 3.7.2. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

Ⓣ **Weierstrass I. tétele**

Ha  $f$  *folytonos* az  $[a, b]$  (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott  $f$  korlátos.

ⓑ Indirekt:

Tfh. nem korlátos pl. felülről, tehát  $\nexists K : f(x) \leq K$  teljesüljön  $\forall x \in [a, b]$ -re.

Ekkor  $\exists x_1 : x_1 \in [a, b], f(x_1) > 1$

$\exists x_2 : x_2 \in [a, b], f(x_2) > 2$

$\vdots$   $\vdots$   $\vdots$

$\exists x_n : x_n \in [a, b], f(x_n) > n$

$\vdots$   $\vdots$   $\vdots$

$(x_n)$  sorozat korlátos ( $\forall x_n \in [a, b]$ ) B.W. kiv. t.  $\exists$  konv. részsorozat:  $(x_{n_i}) \rightarrow x_0$ .

Mivel  $a \leq x_{n_i} \leq b$  mindig fennáll, ezért  $a \leq \lim_{n_i \rightarrow \infty} x_{n_i} = x_0 \leq b$ . Tehát  $x_{n_i} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ , de  $f(x_{n_i}) \rightarrow \infty \not\rightarrow f(x_0)$   $\nexists$   $f$  folytonos  $x_0$ -ban, ezért  $f(x_{n_i}) \rightarrow f(x_0)$ . ■

Ⓣ **Weierstrass II. tétele:**

Ha  $f$  *folytonos*  $[a, b]$ -ben, akkor ott felveszi az infimumát, ill. szuprimumát, tehát van minimuma és maximuma. Vagyis  $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ , hogy

$$f(\alpha) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \left( = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = \max f([a, b]) \right)$$

$$f(\beta) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \left( = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = \min f([a, b]) \right)$$

Ⓑ  $A := f([a, b])$ .

Weierstrass I. tétele értelmében  $A$  korlátos  $\xrightarrow{\text{Dedekind}} \exists \sup A := M; \inf A := m$ .

Megmutatjuk, hogy  $\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) = M, f(\beta) = m$ .

Bizonyítás  $f(\alpha) = M$ -re: indirekt. (Hasonlóan lehetne  $f(\beta) = m$ -re.)

Tfh.  $\nexists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = M \implies M - f(x) > 0$ , ha  $x \in [a, b]$

$\implies g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$  folytonos  $[a, b]$ -ben  $\xrightarrow{\text{W. I. t.}} g$  korlátos  $[a, b]$ -ben, tehát  $\exists K$  :

$$\frac{1}{M - f(x)} < K, \quad x \in [a, b] \quad (K > 0, \frac{1}{M - f(x)} > 0)$$

$$M - f(x) > \frac{1}{K}$$

$$f(x) < \underbrace{M - \frac{1}{K}}_{\text{felső korlát}} < M \text{ (legkisebb felső korlát)} \quad \nexists$$

■

Ⓜ Weierstrass tételeiből sem a függvény folytonossága, sem a halmaz kompaktsága nem hagyható el.

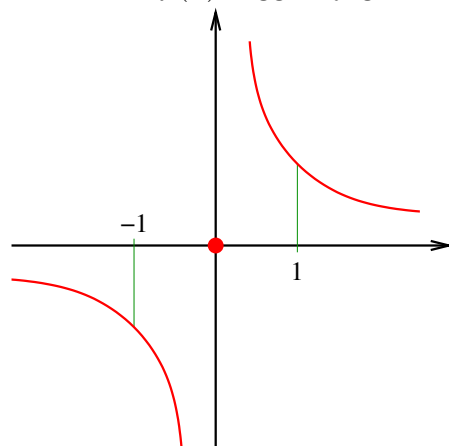
Tekintsük például a 3.5 ábrán látható függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ha  $f$ -et a  $(0, 1]$  nem zárt intervallumon vizsgáljuk, akkor ott se nem korlátos se nem veszi fel szuprémumát, bár folytonos.

Ugyanígy, ha a  $[-1, +1]$  intervallumon vizsgáljuk, akkor sem korlátos, és nem veszi fel szuprémumát (és infimumát sem), bár most az intervallum kompakt, de  $f$  nem folytonos.

Végül jegyezzük meg, hogy ha  $f$ -et az  $[1, \infty)$  nem korlátos (zárt) intervallumon vizsgáljuk, akkor szintén nem veszi fel infimumát.

3.5. ábra. Az  $f(x)$  függvény grafikonja

### 3.7.3. Egyenletes folytonosság

Ⓟ

$$f(x) = x^2 + 2$$

1. Mutassuk meg, hogy  $\forall x_0 \in [1, 2]$ -ben folytonos a függvény!
2. Megadható-e közös  $\delta(\varepsilon)$ ? (Létezik-e  $\inf_{x_0 \in [1, 2]} \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ ?)

**Megoldás.** 1.  $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 + 2 - (x_0^2 + 2)| = |x - x_0||x + x_0| < |x - x_0|(2|x_0| + 1) < \varepsilon$

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} = \delta(\varepsilon, x_0)$$

$$2. \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \underset{x_0 \in [1, 2]}{\geq} \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon, 2) \quad \text{a közös } \delta(\varepsilon)$$

Ⓝ

Az  $f$  függvény egyenletesen folytonos az  $A$  halmazon, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta(\varepsilon)$  ( $A$ -ban közös):

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |x_1 - x_2| < \delta; \quad x_1, x_2 \in A$$

Ⓜ<sub>1</sub>

Tehát  $\exists \inf_{x \in A} \delta(\varepsilon, x) > 0$

Ⓜ<sub>2</sub>

Az  $A$  halmaz általában intervallum szokott lenni.

**Pl.**  $f(x) = x^2 + 2$

1. Egyenletesen folytonos-e  $f$  az  $[1, 2]$  intervallumon?
2. Egyenletesen folytonos-e  $f$  az  $(1, 2)$  intervallumon?
3. Egyenletesen folytonos-e  $f$  az  $(1, \infty)$  intervallumon?

**Megoldás.** 1. Igen.  $\delta(\varepsilon, 2)$  megfelel. (Lásd előző példa!)

2. Igen.  $\delta(\varepsilon, 2)$  megfelel. (Ami a zárt intervallumhoz megfelel, az a nyílthoz is mindig jó.) Általánosságban is igaz, hogy ha  $f$  egyenletesen folytonos  $I$ -n (nyílt vagy zárt), akkor  $I_1 \subset I$  esetén  $I_1$ -en is egyenletesen folytonos. Ugyanaz a  $\delta$  megfelel.

3.  $f$  nem egyenletesen folytonos  $(1, \infty)$ -en.

$x_n^{(1)} := n \rightarrow \infty$ ,  $x_n^{(2)} := n + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$ ,  $x_n^{(2)} - x_n^{(1)} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ; egymást tetszőlegesen megközelítik, ha  $n$ -et elegendően nagyoknak választjuk.

Mégis

$$|f(x_n^{(2)}) - f(x_n^{(1)})| = \left| \left( n + \frac{1}{n} \right)^2 + 2 - (n^2 + 2) \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Tehát, ha  $\varepsilon < 2$ , nincs közös  $\delta$ .

**Pl.**  $f(x) = x$  egyenletesen folytonos  $(-\infty, \infty)$ -en.

**Megoldás.**

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \varepsilon \implies \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

**Pl.**  $f(x) = \sin x$  egyenletesen folytonos  $(-\infty, \infty)$ -en.

**Megoldás.** Felhasználjuk, hogy

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ , ill. } |\sin x| \leq |x|.$$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2| < \varepsilon \implies \delta(\varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$



Ⓜ Ezzel persze azt is beláttuk, hogy  $\sin x$  mindenütt folytonos.

És mivel  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ , így  $\cos x$  is mindenütt folytonos, mivel folytonos függvények összetétele.

Pl.  $f(x) = \operatorname{tg} x$  egyenletesen folytonos  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ -on.

Megoldás.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x_2}{\cos x_2} \right| = \left| \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2} = 4|x_1 - x_2| < \varepsilon$$

$$\implies \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$$

Pl.  $f(x) = \frac{1}{x}$  nem egyenletesen folytonos  $(0, 1)$ -en.

Megoldás.  $x_n^{(1)} := \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ,  $x_n^{(2)} := \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \implies x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \rightarrow 0$ .

Ugyanakkor

$$|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| = |n - (n+1)| = 1 \not< \varepsilon, \text{ ha } \varepsilon < 1$$

Pl.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  nem egyenletesen folytonos  $(0, 1)$ -en.

Megoldás.  $x_n^{(1)} := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0$ ,  $x_n^{(2)} := \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0$

$$|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \sin\left(3\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \right| = |1 - (-1)| = 2 \not< \varepsilon, \text{ ha } \varepsilon \leq 2.$$

Ⓣ **Heine tétele:**

Ha  $f$  folytonos az  $[a, b]$  zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos. ( $\neg B$ )

Ⓣ Ha  $f$  folytonos  $[a, \infty)$ -en és  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  (véges), akkor  $f$  egyenletesen folytonos  $[a, \infty)$ -en. ( $\neg B$ )

**P1.**  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Egyenletesen folytonos-e  $(1, 10)$ -en?

**Megoldás.** Mivel  $P_n$  folytonos  $[1, 10]$ -en  $\implies P_n$  itt egyenletesen folytonos  
 $\implies P_n$  az  $(1, 10) \subset [1, 10]$ -en is egyenletesen folytonos.

### Feladatok

1.  $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

- a) Hol és milyen típusú szakadása van az  $f$  függvénynek?  
 b) Van-e minimuma  $f$ -nek a  $[-1, 0]$  intervallumon?

2.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} - \frac{1}{\cos x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$   $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = ?$

- b) Bizonyítsa be, hogy  $f$ -nek van gyöke  $(0, \frac{\pi}{2})$ -ben!

3. Legyen  $f$  folytonos  $(-\infty, \infty)$ -en és  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ .

Bizonyítsa be, hogy  $f$  korlátos  $(-\infty, \infty)$ -en! Van-e nullahelye  $f$ -nek?

4. a) Mikor mondjuk, hogy  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$  ?

- b) Bizonyítsa be, hogy ha  $f$  folytonos a  $[2, \infty)$  intervallumon és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5, \quad \sup_{x \in (2, \infty)} f(x) = 6,$$

akkor  $f$  értékkészletében szerepel a 6.

5. Van-e gyöke az alábbi egyenletnek a  $(0, \pi)$ -ben?

$$\frac{1}{x}(\cos^2 x + 1) + \frac{1}{x - \pi}(\sin^2 x + 1) = 0$$

6.  $f(x) = 2x^3 - 3$

- a) Mutassa meg a határérték definíciója alapján, hogy  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 13$  ( $\delta(\varepsilon) = ?$ )  
 b) Egyenletesen folytonos-e az  $f$  függvény az  $(1, 4)$  intervallumon?  
 c) Egyenletesen folytonos-e az  $f$  függvény az  $(1, \infty)$  intervallumon?

## 4. fejezet

# Egyváltozós valós függvények differenciálása

### 4.1. Differenciálszámítás

App  
⇒  
App  
⇒

Ⓓ Differenciahányados (különbségi hányados):

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left( \frac{\text{függvényérték megváltozása}}{\text{független változó megváltozása}} = \text{húr iránytangense} \right)$$

$\Delta x \rightarrow 0$  esetén a húrok átmennek az érintőbe, ha létezik  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$  differenciáhányados (derivált) = az érintő iránytangense.

Ⓓ Legyen  $K_{x_0, \delta} \subset D_f$

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f$  deriválható (differenciálható)  $x_0$ -ban, ha a fenti határérték létezik és véges. Ekkor  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$  az  $f$  függvény  $x_0$  pontbeli deriváltja (differenciáhányadosa).

Ⓓ Jobb oldali derivált:  $f'_+(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f$  jobbról deriválható (jobbról differenciálható)  $x_0$ -ban, ha a fenti határérték létezik és véges.

Ⓓ Bal oldali derivált:  $f'_-(x_0)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f$  balról deriválható (balról differenciálható)  $x_0$ -ban, ha a fenti határérték létezik és véges.

Ⓜ  $f'(x_0)$  akkor és csak akkor létezik, ha  $\exists f'_+(x_0)$  és  $f'_-(x_0)$  és  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Ⓓ  $f$  deriválható (differenciálható)  $(a, b)$ -ben, ha  $f$  differenciálható  $x$ -ben  $\forall x \in (a, b)$ -re.

Ⓓ  $f$  deriválható (differenciálható)  $[a, b]$ -ben, ha differenciálható  $(a, b)$ -ben és még  $\exists f'_+(a), f'_-(b) \in \mathbb{R}$ .

Ⓟ  $f(x) = x^2, \quad f'(5) = ?$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10 + h) = 10. \end{aligned}$$

Ⓟ  $f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(3) = ?$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - (3+h)}{3h(3+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9}.$$

Ⓟ  $f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(4) = ?$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Ⓟ  $f(x) = |x|, \quad f'(3) = ?, \quad f'(-2) = ?, \quad f'(0) = ?$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|3+h| - |3|}{h} \stackrel{\text{ha } |h| < 3}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+h-3}{h} = 1;$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|-2+h| - |-2|}{h} \stackrel{\text{ha } |h| < 2}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-h-2}{h} = -1.$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists f'(0)$$

Az  $f(x) = |x|$  függvény folytonos az origóban, de nem deriválható; ilyenkor azt mondjuk, hogy az origóban a függvénynek *törése* van.

**P1.**  $f(x) = x|x|, \quad f'(0) = ?$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$$

**P1.**  $f(x) = \sqrt{4x+5}, \quad f'(1) = ?$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4(1+h)+5} - \sqrt{4 \cdot 1 + 5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+4h} - \sqrt{9}}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+4h} + \sqrt{9}}{\sqrt{9+4h} + \sqrt{9}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+4h-9}{h(\sqrt{9+4h}+3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{9+4h}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

**T Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra:**

$f$  akkor és csak akkor differenciálható  $x_0$ -ban, ha  $K_{x_0, \delta} \subset D_f$ ,  $|h| < \delta$ -ra:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol  $A$  csak  $x_0$ -tól függhet,  $h$ -tól nem, és  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ . (Itt  $A = f'(x_0)$ .)

**B** 1. Szükségesség:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \implies \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon,$$

$$\text{ahol } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ ha } h \rightarrow 0. \implies (\Delta f =) f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \varepsilon \cdot h.$$

2. Elégségesség:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \text{ teljesül. Innen}$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(h) \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A \quad (= f'(x_0))$$



**(T)** Ha  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban, akkor ott folytonos.

**(M)** Tehát a folytonosság szükséges feltétele a differenciálhatóságnak, de nem elégséges. Lásd  $|x|$ .

**(B)** A szükséges és elégséges tétel alapján:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \quad \blacksquare$$

Mindkét oldalon határértéket veszünk.  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ -ra jutunk, vagyis a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, tehát folytonos.

**(Pl.)**  $f(x) = x^2$       $f'(x) = ?$

$$\Delta f = f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 - x^2 = 2x \cdot h + h \cdot h = A \cdot h + \varepsilon \cdot h$$

$$A = f'(x) = 2x \quad (\text{független } h\text{-től}), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

#### 4.1.1. Differenciál, érintő egyenes

Ha  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0) \cdot h}_{\text{főrész}} + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot h}_{\text{elenyésző rész}}$$

**(D)** Az  $f$  függvény (elsőrendű) differenciálja az  $x_0$  pontban  $h$  megváltozás mellett:  
 $df = df(x_0, h) := f'(x_0) \cdot h$

**(M)**  $df(x_0, h)$ : a függvény  $x_0$ -beli érintő egyenesén a függvényérték megváltozása  $h$  lépésre. (4.1 ábra)

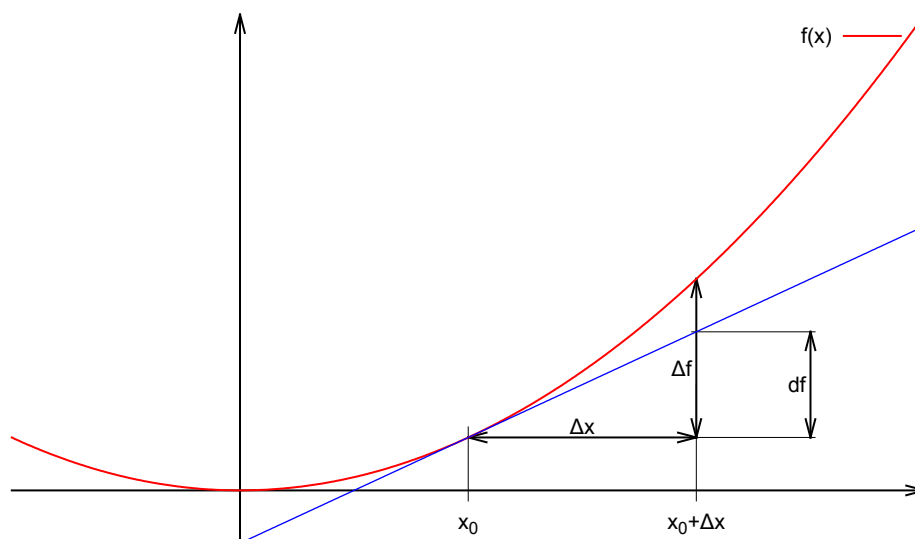
Egyéb jelölések:

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x; \quad df = f'(x) \Delta x = f'(x) \cdot dx$$

**(Pl.)**  $f(x) = x^3$ :  $df = 3x^2 \Delta x$ , tehát  $dx^3 = 3x^2 \Delta x$

**(Pl.)**  $f(x) = x$ :  $df = 1 \cdot \Delta x$ , tehát  $dx = \Delta x$ . Ez indokolja a differenciál legutolsó jelölését.

4.1. ábra. Egy függvény  $\Delta f$  megváltozása valamint  $df$  elsőrendű differenciálja az  $x_0$  pontban, a  $\Delta x$  megváltozás mellett



Alkalmazása:

$$\Delta f \approx df :$$

$$f(\underbrace{x_0 + h}_{:=x}) \approx f(x_0) + df(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) :$  az  $x_0$  pontbeli érintő egyenes egyenlete.

### 4.1.2. Differenciálási szabályok

App1  
⇒

App2  
⇒

App3  
⇒

App4  
⇒

**(T)** Ha  $f$  és  $g$  differenciálható  $x$ -ben, akkor itt  $f + g$ ,  $cf$  ( $c \in \mathbb{R}$ ),  $f \cdot g$  is differenciálható valamint  $g(x) \neq 0$  esetén  $\frac{1}{g}$  és  $\frac{f}{g}$  is differenciálható, és

1.  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2.  $(cf(x))' = cf'(x)$
3.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

<sup>1</sup>konstansszoros deriváltja

<sup>2</sup>összeg deriváltja

<sup>3</sup>szorzat deriváltja

<sup>4</sup>összetett függvény deriváltja

$$4. \left( \frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$5. \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

ⓑ

$$1. (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$z(x) := f(x) + g(x)$$

$$\begin{aligned} z'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$$2. (cf(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(cf(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

$$3. (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x) \quad (\text{határérték} = \text{helyettesítési érték}) \text{ oka:}$$

$$g \text{ deriválható } x\text{-ben} \implies g \text{ folytonos } x\text{-ben}$$

$$4. \left( \frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h g(x+h)g(x)} =$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{g(x+h) \cdot g(x)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ :  $g$  folytonossága miatt

$(g(x) \neq 0$  és  $g$  folytonos  $x$ -ben (mivel deriválható)  $\implies \exists K_x : g(x) \neq 0$  (lásd a Bolzano tétel előtti segédtelet). Tehát elegendően kis  $h$ -ra  $g(x+h) \neq 0$ .)

5. 
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Ez már következik az előző két pontból:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \\ &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Láncszabály: összetett függvény deriválása

**(T<sub>2</sub>)** Ha  $f$  *differenciálható*  $K_{x,\delta_1}$ -ben és  $g$  *differenciálható*  $K_{f(x),\delta_2}$ -ben, akkor  $g \circ f$  is *differenciálható*  $x$ -ben és

$$((g \circ f)(x))' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (\neg B)$$

**(T<sub>3</sub>)** Ha  $f$  *folytonos*  $K_{x_0,\delta}$ -ban,  $x \in K_{x_0,\delta} \setminus \{x_0\}$  (tehát  $x \in \dot{K}_{x_0,\delta}$ ) esetén  $\exists f'(x)$  és  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = c$ , akkor  $f$  *differenciálható*  $x_0$ -ban és  $f'(x_0) = c$ .  $(\neg B)$

**(P1.)**  $f(x) = (2x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 5}$

$$f'(x) = (2x^2 + 3)' \sqrt{x^2 + 5} + (2x^2 + 3) (\sqrt{x^2 + 5})' = 4x\sqrt{x^2 + 5} + (2x^2 + 3) \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} \cdot 2x$$

**(P1.)**  $f(x) = \frac{x^7 + x^2 + 5}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}$

$$f'(x) = \frac{(x^7 + x^2 + 5)' \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} - (x^7 + x^2 + 5) (\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1})'}{(\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1})^2} =$$

$$= \frac{(7x^6 + 2x)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} - (x^7 + x^2 + 5) \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}} \cdot (4x^3 + 4x)}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

•••

### 4.1.3. Magasabbrendű deriváltak

Ha az  $f(x)$  függvény differenciálható az  $x_0$  pont egy környezetében, akkor az  $f'(x)$  derivált függvény  $x_0$ -beli differenciálhányadosa adja meg az  $f(x)$  függvény  $x_0$  pontban vett  $f''(x_0)$  második deriváltját, azaz

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}.$$

A második derivált egy adott  $x_0$  pontban való létezéséhez tehát szükséges, hogy az első derivált függvény az  $x_0$  pont egy kis környezetében létezzék.

Az  $f(x)$  függvény ismételt deriválásával kapjuk a függvény további, harmadik, negyedik, stb. deriváltját. A magasabbrendű deriváltakat zárójelbe tett arab számmal, esetleg római számmal, vagy a differenciáhányadosra utaló formális törttel jelöljük:

$$\begin{aligned} \text{másodrendű derivált:} & \quad f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = f^{\text{II}}(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \\ \text{harmadrendű derivált:} & \quad f'''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = f^{\text{III}}(x_0) = \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} \\ & \quad \vdots \\ \text{ötödrendű derivált:} & \quad f^{(5)}(x_0) = f^{\text{V}}(x_0) = \frac{d^5 f(x_0)}{dx^5} \\ & \quad \vdots \\ \text{n-edrendű derivált:} & \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}. \end{aligned}$$

Fizikában idő szerinti deriváltat, illetve matematikában paraméter szerinti deriváltat szokás vessző helyett a függvény fölé tett ponttal is jelölni. Ha például az  $x(t)$  függvény egy egyenesvonalú mozgás hely-idő függvénye, akkor az  $x'(t) = \dot{x}(t)$  derivált függvény a mozgás sebesség-idő függvénye, és az  $x''(t) = \ddot{x}(t)$  második derivált pedig a gyorsulás-idő függvény.

**(Pl.)** A következő függvény mindenütt deriválható, de második deriváltja az origóban nem létezik.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad f'(x) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = ? \quad f''(x) = ?$$

Ha  $x \neq 0$ , alkalmazhatjuk a deriválási szabályokat:

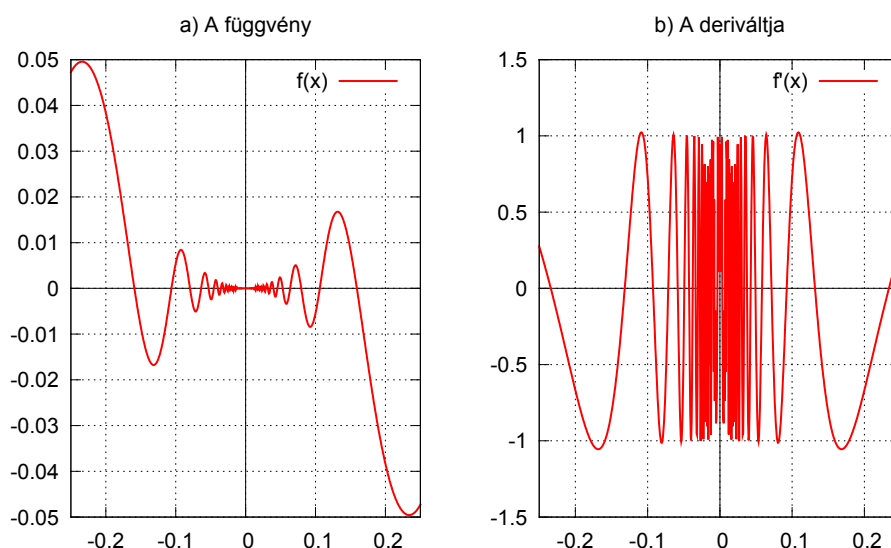
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Ha  $x = 0$ , a definícióval dolgozunk:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{h}}_{\text{korlátos}} = 0$$

Az  $f(x)$  és az  $f'(x)$  függvény grafikonját a 4.2. ábra mutatja.

4.2. ábra. Egy mindenütt deriválható függvény, melynek deriváltja az origóban szakad



Látható, hogy  $f'(x)$ -nek (másodfajú) szakadása van az origóban, tehát  $\nexists f''(0)$ . Ha  $x \neq 0$ ,  $f''(x)$  a deriválási szabályok ismételt alkalmazásával egyszerűen kiszámolható.

Érdekesképpen megemlítjük a következő tételt:

**(T)** Intervallumon értelmezett deriváltfüggvénynek csak *másodfajú szakadása* lehet.

A tételt nem bizonyítjuk.

#### 4.1.4. Inverz függvény



Ⓓ Az  $f$  függvény *invertálható* értelmezési tartományának egy  $I \subset D_f$  részhalmazán, ha bármely két  $x_1, x_2 \in I$  szám esetén az  $f(x_1) = f(x_2)$  egyenlőség teljesülése maga után vonja, hogy  $x_1 = x_2$ , tehát ha az  $f$  függvény az  $I$  halmazon injektív (kölcsonösen egyértelmű vagy 1-1 értelmű). Ekkor bármely  $y \in R_f$  szám esetén legfeljebb egyetlen olyan  $x \in I$  szám létezik, melyre  $f(x) = y$ . Ezesetben azt mondjuk, hogy  $x$  az  $y$  szám  $f$ -inverze általi képe;  $x = f^{-1}(y)$ .

Az inverz függvény jelölése összekeverhető a mínusz első hatvánnyal, ezért ez utóbbit inkább  $1/f$ -el jelöljük. A számunkra fontos esetekben  $I \subset D_f$  intervallum.

Az inverz függvény értelmezési tartománya, értékkészlete:

$$D_{f^{-1}} = f(I) = \{y \in R_f \mid \exists x \in I : f(x) = y\}, \quad R_{f^{-1}} = I \subset D_f.$$

A definícióból azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned} \forall x \in I : & \quad f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = x, & \text{és} \\ \forall y \in f(I) : & \quad f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = y. \end{aligned}$$

Igaz továbbá, hogy  $(f^{-1})^{-1} = f|_I$ , tehát egy függvény inverzének inverze megegyezik az eredeti függvény megszorításával arra a halmazra, amelyen az inverzet képeztük.

Ⓓ Ha  $f$  *szigorúan monoton* az  $I \subset D_f$  halmazon, akkor itt *invertálható*.

Ⓔ Ha valamely  $y \in R_f$  esetén létezne  $x_1, x_2 \in I$ , melyre  $f(x_1) = f(x_2) = y$ , és  $x_1 \neq x_2$ , akkor ellentmondásba kerülnénk a szigorú monotonitással. ■

Igaz továbbá, hogy  $f^{-1}$  pontosan akkor szigorúan monoton növény, ill. csökkenő, ha  $f$  szigorúan monoton növény, ill. csökkenő  $I$ -n.

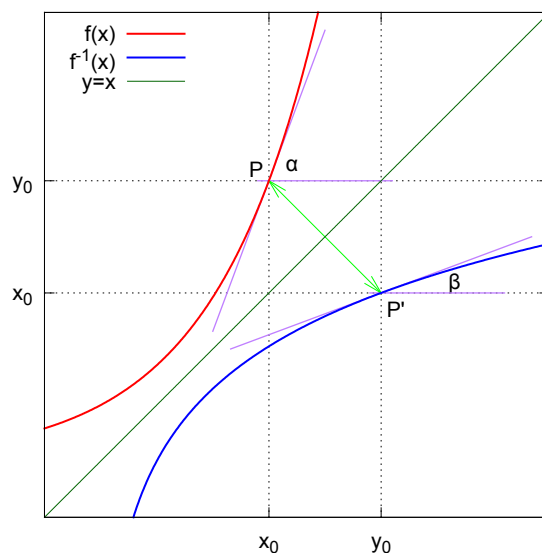
Ⓕ Az  $f(x) = x^2$  függvény nem invertálható a teljes  $\mathbb{R}$  halmazon, hiszen  $f(x) = f(-x)$ . Azonban  $f$  szigorúan monoton az  $I = [0, \infty)$  intervallumon, tehát itt invertálható, és  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

A következő tétel geometriai kapcsolatot teremt  $f$  és  $f^{-1}$  grafikonja között.

Ⓓ Ha az  $f$  függvény invertálható, akkor  $f^{-1}$  inverzének grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az  $y = x$  egyenesre való tükrözésével kapható meg. (4.3. ábra)

Ⓔ Ha a  $P(x_0, y_0)$  pont az  $f$  függvény grafikonján van, akkor  $y_0 = f(x_0)$ , és így  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ , tehát a  $P'(y_0, x_0)$  pont az  $f^{-1}$  inverz függvény grafikonján helyezkedik el.  $P$  és  $P'$  egymás tükörképei az  $y = x$  egyenesre nézve, ezzel az állítást beláttuk. ■

4.3. ábra. Az inverz függvény grafikonja az eredeti grafikonnak az  $y = x$  egyenesre való tükörképe



### Inverz függvény deriválása

Ⓓ Legyen  $f$  szigorúan monoton  $I$ -ben  $\implies$  invertálható  
 $f$  differenciálható  $I$ -ben  $\implies$   $f$  folytonos  $I$ -ben  
és  $f'(x) \neq 0$   $I$ -ben.

A feltételek miatt belátható, hogy  $f(I)$  is intervallum. Ekkor  $f^{-1}$  differenciálható az  $f(I)$  tetszőleges belső pontjában ( $x_0$ ) és

$$f^{-1}'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x_0)}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{f^{-1}'(f(x_0))}$$

Ⓑ Az összefüggés igazolásához azt kell észrevennünk, hogy a 4.3. ábrán jelölt  $\alpha$  és  $\beta$  szögek pótszögek ( $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ), így  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$ , és

$$f^{-1}'(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Innen  $y_0$  helyett  $x_0$ -t írva kapjuk a bizonyítandó állítást. ■

Az inverz függvény deriválási szabályának egy másik egyszerű bizonyítása az

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

azonosság deriválásával kapható meg. Az összefüggés bal oldalát a lánc szabály szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$f'(f^{-1}(x)) f^{-1}'(x) = 1,$$

ahonnan egyszerű átrendezéssel és  $x = x_0$  helyettesítéssel adódik a bizonyítandó egyenlőség.

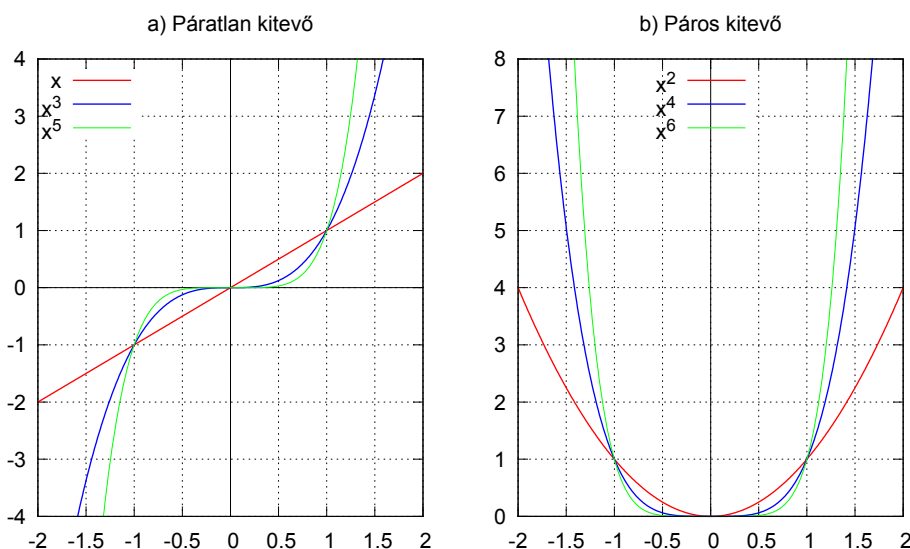
## 4.2. Elemi függvények

### 4.2.1. Hatványfüggvények

Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

4.4. ábra. Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények



A függvény mindenütt **folytonos**. (lásd: 4.4. ábra)

Mindenütt **deriválható** és

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

Ugyanis

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(x+h) - x}{h}}_{=1} ((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}) = \\
 &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ darab tag}} = n x^{n-1}
 \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy

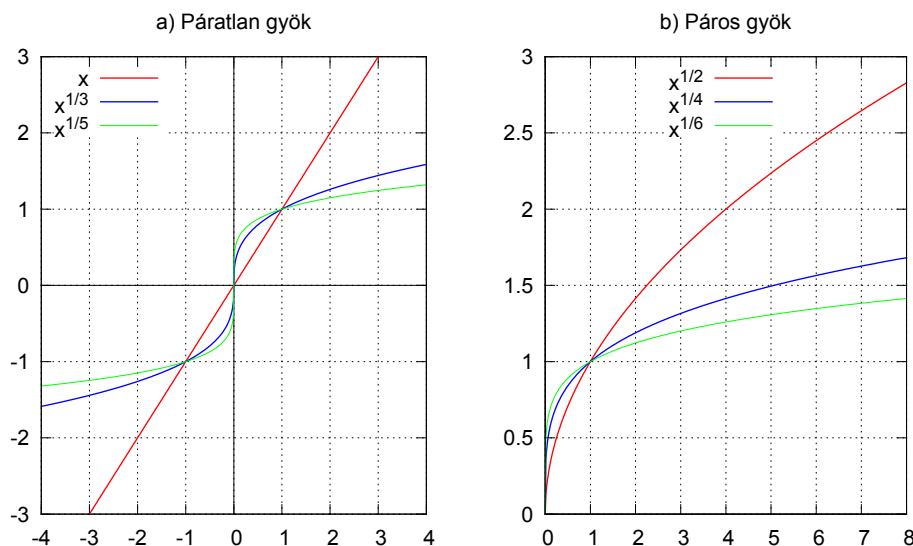
$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

### Pozitív egész rendű gyökfüggvények

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

A függvény az  $x^n$  függvény *inverze* (lásd: 4.5. ábra), páros  $n$  esetén csak  $x \geq 0$  - ra. (Páros  $n$  esetén a teljes értelmezési tartományban nem invertálható a függvény, mert nem kölcsönösen egyértelmű a leképezés.)

4.5. ábra. Pozitív egész rendű gyökfüggvények



$f'(x)$  : az *inverzfüggvény deriválási szabályával*:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}; \quad f^{-1}(u) = u^n; \quad f'(x) = \frac{1}{f^{-1}'(u)|_{u=f(x)}}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{nu^{n-1}|_{u=\sqrt[n]{x}}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

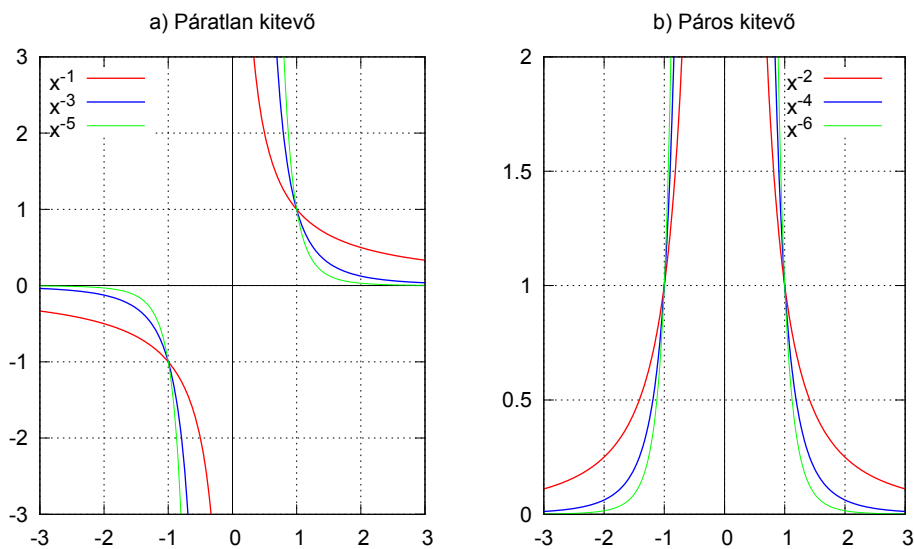
Tehát 
$$\boxed{(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}}$$
  $n$  páros:  $x > 0$   
 $n$  páratlan:  $x \neq 0$

$x = 0$ -ban  $\nexists f'(0)$  ( $n$  páratlan) és  $\nexists f'_+(0)$  ( $n$  páros).

### Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n}} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \text{ (lásd: 4.6. ábra)}$$

4.6. ábra. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények



Deriváltja a reciprokfüggvény  $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$  deriválási szabálya alapján:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = \boxed{-n x^{-n-1}}$$



### Racionális kitevőjű hatványfüggvények

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p} \quad (q > 0)$$

Az összetett függvény differenciálási szabályával belátjuk, hogy most is

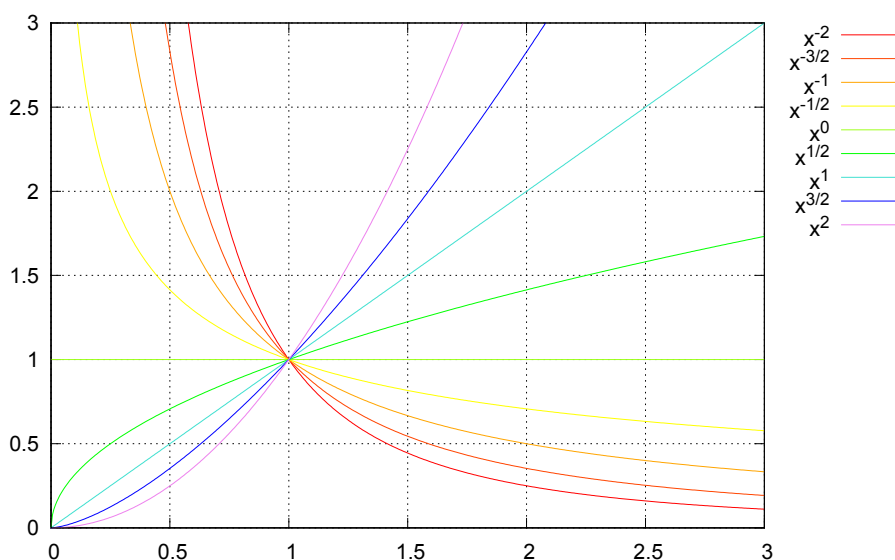
$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

Ugyanis

$$f'(x) = \frac{1}{q} (x^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{q}-1} \cdot p x^{\frac{p}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-p+\frac{p}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

### Valós kitevőjű hatványfüggvények

4.7. ábra. Tetszőleges valós kitevőjű hatványfüggvények



$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \text{ valós}, x > 0).$$

A függvény definíciója:

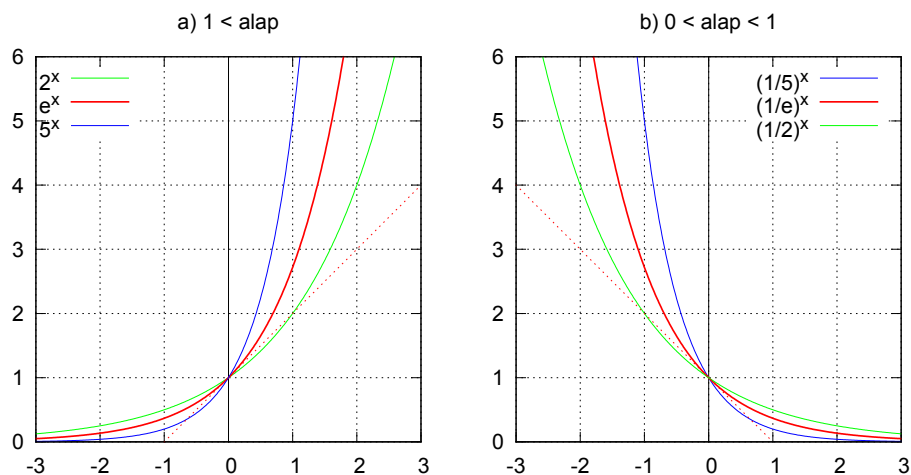
$$x^\alpha := e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

A függvény grafikonja különböző kitevők esetén a 4.7. ábrán látható.

Belátható, hogy most is  $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$ .

## 4.2.2. Exponenciális függvények

4.8. ábra. Különböző alapokhoz tartozó exponenciális függvények



$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Definiálása (vázlat):

$$\text{Ha } x \in \mathbb{Z}^+ : \quad a^x := \underset{1.}{a} \cdot \underset{2.}{a} \cdot \cdots \cdot \underset{x.}{a}$$

$f(x) = a^x$ -re igaz:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad (4.1)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2} \quad (4.2)$$

$$\text{Ha } x = 0 : \quad a^0 := 1$$

$$\text{Ha } x \in \mathbb{Z}^- : \quad a^x := \frac{1}{a^{-x}}$$

$$\text{Ha } x = \frac{p}{q}; \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0 : \quad a^x = a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$$

Ha  $x$  irracionális:

Felvezünk egy racionális értékeket felvevő pontsorozatot, mely az adott  $x$ -hez tart. Tehát

$$x_n \rightarrow x, \quad x_n \in \mathbb{Q}$$

$$a^{x_n} \rightarrow A \text{ esetén : } a^x := A$$

Belátható, hogy  $A$  értéke független  $x_n$  választásától, csak  $x$ -től függ.

Az így definiált függvény tulajdonságai:

$$D_{a^x} = \mathbb{R}, \quad R_{a^x} = (0, \infty),$$

$a > 1$  esetén (4.8.a ábra):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$$

és a függvény szigorúan monoton nő és alulról konvex. Egy speciális exponenciális függvény:  $e^x$ , melynek meredeksége az origóban 1.

$0 < a < 1$  esetén (4.8.b ábra):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty,$$

és a függvény szigorúan monoton csökken és alulról konvex.

Deriválhatóság:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

$x = 0$  - ra:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Nevezetes határérték,  $\neg B$ .

$x \neq 0$  - ra:

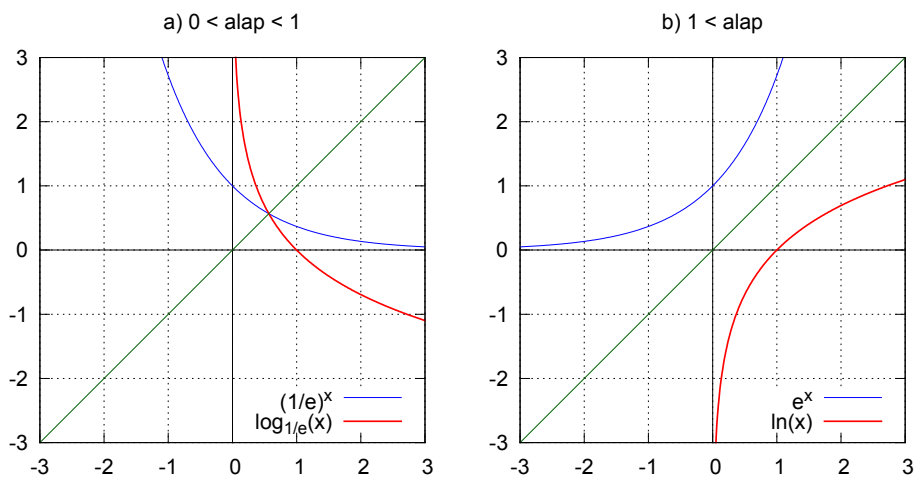
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{e^x}_{e^x} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_1 = e^x$$

### 4.2.3. Logaritmusfüggvények

$$\boxed{f(x) = \log_a x} \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (a^x \text{ inverze, 4.9. ábra})$$

Ha  $a = e$  :  $\ln x$  (természetes alapú logaritmus).

4.9. ábra. A logaritmusfüggvények az exponenciális függvények inverzei



$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

az **inverzfüggvény deriválási szabályával**:

$$f(x) = \ln x, \quad f^{-1}(u) = e^u, \quad f^{-1}'(u) = e^u$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^u|_{u=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Ugyanis  $(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a.$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \quad x > 0$$

Ugyanis  $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}.$

**Pl.**  $f(x) = 10^{2x^2+1}, \quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = 10^{2x^2+1} \cdot \ln 10 \cdot (2x^2 + 1)' = \ln 10 \cdot 10^{2x^2+1} \cdot 4x$$

**Pl.**  $f(x) = \ln|x|, \quad f'(x) = ?$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ezért

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{ha } x \neq 0$$

(Ugyanis  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , és  $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ .)

**Pl.**  $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x^4 + 3}, \quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{x^4 + 3}} \cdot \left( \frac{x^2 + 1}{x^4 + 3} \right)' = \frac{x^4 + 3}{x^2 + 1} \frac{2x(x^4 + 3) - (x^2 + 1)4x^3}{(x^4 + 3)^2}$$

Egyszerűbben is eljuthattunk volna erre az eredményre. Ugyanis most

$$f(x) \equiv \ln(x^2 + 1) - \ln(x^4 + 3).$$

(A két függvény értelmezési tartománya is azonos.)

Ennek felhasználásával

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} 2x - \frac{1}{x^4 + 3} 4x^3$$

#### 4.2.4. Exponenciális hatványfüggvények

**D** Exponenciális hatványfüggvény definíciója:

$$(f(x))^{g(x)} := e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Értelmezett, ha  $f$  és  $g$  értelmezett és  $f(x) > 0$ .

Deriválása ezen alak segítségével.

**Pl.**

$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

Pl.

$$\begin{aligned} \left( (1+x^2)^{\sin 2x} \right)' &= \left( e^{\sin 2x \cdot \ln(1+x^2)} \right)' = e^{\sin 2x \cdot \ln(1+x^2)} \cdot (\sin 2x \cdot \ln(1+x^2))' = \\ &= (1+x^2)^{\sin 2x} \left( \cos 2x \cdot 2 \cdot \ln(1+x^2) + \sin 2x \cdot \frac{2x}{1+x^2} \right) \end{aligned}$$

M A derivált meghatározásához felhasználhatjuk a **logaritmikus deriválást** is:

$$h(x) := (f(x))^{g(x)}$$

Mindkét oldalra alkalmazzuk az  $\ln$  függvényt:

$$\ln h(x) = \ln (f(x))^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x)$$

Mindkét oldalt  $x$  szerint deriválva:

$$\frac{1}{h(x)} h'(x) = (g(x) \cdot \ln f(x))' \implies h'(x) = h(x) \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))'$$

Természetesen ugyanahhoz az eredményhez vezet ez a módszer is, mint az előző.

#### 4.2.5. Trigonometrikus függvények és inverzeik (ciklometrikus vagy arcus függvények)

App  
→

A szinuszfüggvény és inverze

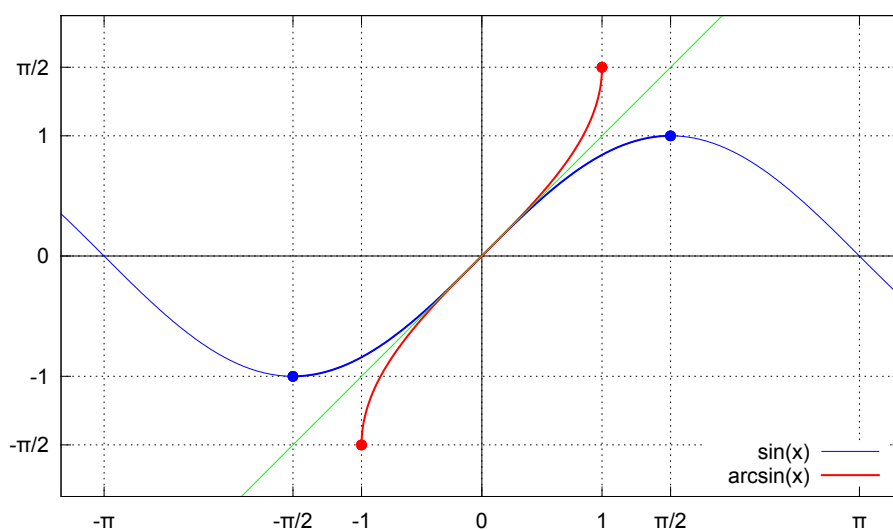
$$f(x) = \sin x$$

Mindenütt folytonos. (4.10 ábra)

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} = \cos x \end{aligned}$$

Ugyanis:

4.10. ábra. A  $\sin(x)$  és inverze, az  $\arcsin(x)$  függvény

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin \frac{h}{2} = -1 \cdot 0 = 0$$

A  $\sin(x)$  függvény a teljes értelmezési tartományban nem invertálható, mert végtelen sokrétű. Ezért szűkítjük az értelmezési tartományt:

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [-1, 1] \quad \text{szigorúan monoton} \implies \exists f^{-1}(x)$$

$$\textcircled{D} \quad f^{-1}(x) = \boxed{\arcsin x} :$$

Jelenti azt a  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ -be eső radiánban mért szöget, melynek szinusza  $x$  (4.10. ábra).

Tulajdonságai:

$$D_{\arcsin x} = [-1, 1], \quad R_{\arcsin x} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Szigorúan monoton nő, páratlan.

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad |x| < 1$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad f(x) = \sin x, \quad f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'(u)} \Big|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos u} \Big|_{u=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \Big|_{u=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

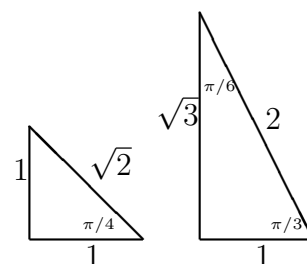
Felhasználtuk, hogy

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \implies \cos u = +\sqrt{1-\sin^2 u} \quad \text{és} \quad \sin \arcsin x = x$$

(A megadott intervallumon  $\cos u$  pozitív.)

A nevezetes szögek szögfüggvényei az alábbi két jól ismert háromszög segítségével számíthatók ki:

$$\begin{aligned} \arcsin 0 &= 0 \\ \arcsin 1 &= \frac{\pi}{2} \\ \arcsin(-1) &= -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\pi}{4} \\ \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\pi}{6} \\ \sin \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \arcsin \sin \frac{2\pi}{3} &= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \left( = \pi - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$



Néhány példa:

**Pl.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = ?$

1. megoldás:

Helyettesítéssel oldjuk meg:

$$u := \arcsin x \implies x = \sin u$$

Ha  $x \rightarrow 0$ , akkor  $u \rightarrow 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = 1$$

2. megoldás:



Mivel az  $\arcsin x$  függvény deriváltját az inverzfüggvény deriválási szabályával vezettük le, a derivált definícióját felhasználhatjuk a megoldáshoz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - 0}{x - 0} = (\arcsin x)'|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=0} = 1$$

**Pl.**

$$f(x) = \pi + 2 \arcsin(x^2 - 1), \quad g(x) = \arcsin \frac{1}{x^2}$$

- a) Határozza meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!  
 b) Írja fel a deriváltfüggvényeket, ahol azok léteznek!

**Megoldás.**

a)  $f$  értelmezési tartománya:

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \implies \underbrace{0 \leq x^2 \leq 2}_{\forall x\text{-re igaz}} \implies |x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Tehát } D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$f$  értékkészlete:

$$\text{Mivel } x^2 - 1 \in [-1, 1] \implies \arcsin(x^2 - 1) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\implies 2 \arcsin(x^2 - 1) \in [-\pi, \pi] \implies R_f = [0, 2\pi]$$

$g$  értelmezési tartománya:

$$\underbrace{0 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1}_{\forall x\text{-re igaz}} \implies x^2 \geq 1 \implies |x| \geq 1$$

$$\text{Tehát } D_g = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

$g$  értékkészlete:

$$\text{Mivel } \frac{1}{x^2} \in (0, 1] \implies \arcsin \frac{1}{x^2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

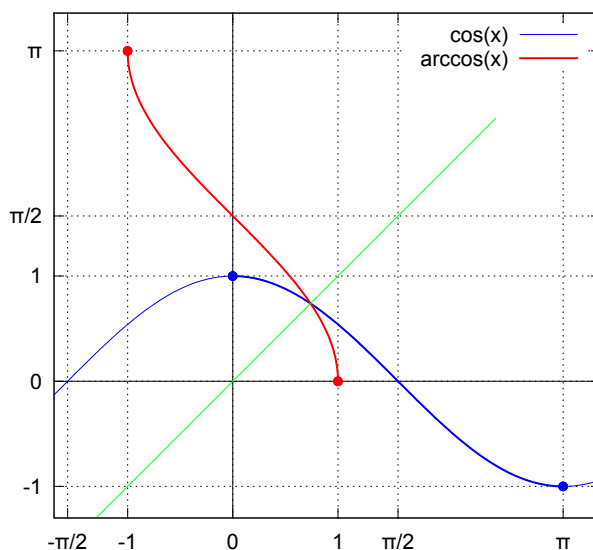
$$\text{Így } R_g = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{b) } f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} 2x, \quad |x| < \sqrt{2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}} \cdot \frac{-2}{x^3}, \quad |x| > 1$$

### A koszinuszfüggvény és inverze

4.11. ábra. A  $\cos(x)$  és inverze, az  $\arccos(x)$  függvény



$$f(x) = \cos x$$

Mindenütt folytonos. (4.11. ábra)

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} = -\sin x \end{aligned}$$

Invertálás:

A  $\cos(x)$  függvény a teljes értelmezési tartományban nem invertálható, mert végtelen sokrétű. Ezért szűkítjük az értelmezési tartományt:

$f : [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$  szigorúan monoton  $\implies \exists f^{-1}(x)$

$$\textcircled{D} \quad f^{-1}(x) = \boxed{\arccos x}$$

Jelenti azt a  $[0, \pi]$  -be eső radiánban mért szöget, melynek koszinusza  $x$ . (4.11. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\arccos x} = [-1, 1], \quad R_{\arccos x} = [0, \pi]$$

Szigorúan monoton csökken.

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| < 1}$$

Bizonyítása az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$f^{-1}(x) = \arccos x, \quad f(u) = \cos u, \quad f'(u) = -\sin u$$

$$f^{-1}'(x) = \frac{1}{f'(u)} \Big|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin u} \Big|_{u=\arccos x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 u}} \Big|_{u=\arccos x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Pl.**

$$f(x) = 5\pi - 2 \arccos(4x - 1)$$

a)  $D_f = ?$ ,  $R_f = ?$

b) Létezik-e inverze  $f$ -nek?

Ha igen,  $f^{-1}(x) = ?$ ,  $D_{f^{-1}} = ?$ ,  $R_{f^{-1}} = ?$

c) Írja fel a függvény  $x_0 = \frac{1}{8}$  pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

**Megoldás.**

a) ÉT.:  $-1 \leq 4x - 1 \leq 1 \implies 0 \leq 4x \leq 2 \implies 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Tehát  $D_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \text{Mivel } (4x - 1) \in [-1, 1] &\implies \arccos(4x - 1) \in [0, \pi] \\ &\implies 2 \arccos(4x - 1) \in [0, 2\pi] \implies R_f = [3\pi, 5\pi] \end{aligned}$$

b)  $f$  szigorúan monoton nő  $D_f$ -en:

Ugyanis, ha felvesszünk az értelmezési tartományban két pontot:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2} &\implies 4x_1 - 1 < 4x_2 - 1 \\ &\implies \arccos(4x_1 - 1) > \arccos(4x_2 - 1) \\ &\implies -2 \arccos(4x_1 - 1) < -2 \arccos(4x_2 - 1) \\ &\implies f(x_1) = 5\pi - 2 \arccos(4x_1 - 1) < 5\pi - 2 \arccos(4x_2 - 1) = f(x_2) \end{aligned}$$

Mivel a függvény szigorúan monoton nő  $D_f$ -en, ezért  $\exists f^{-1}(x)$ .

$f^{-1}(x)$  meghatározása :

$$\begin{aligned} y &= 5\pi - 2 \arccos(4x - 1) \\ \implies \arccos(4x - 1) &= \frac{5\pi - y}{2} \implies 4x - 1 = \cos \frac{5\pi - y}{2} \\ \implies x &= \frac{1}{4} \left( 1 + \cos \frac{5\pi - y}{2} \right) \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{1}{4} \left( 1 + \cos \frac{5\pi - x}{2} \right) \\ D_{f^{-1}} &= R_f = [3\pi, 5\pi] \quad \text{és} \quad R_{f^{-1}} = D_f = \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

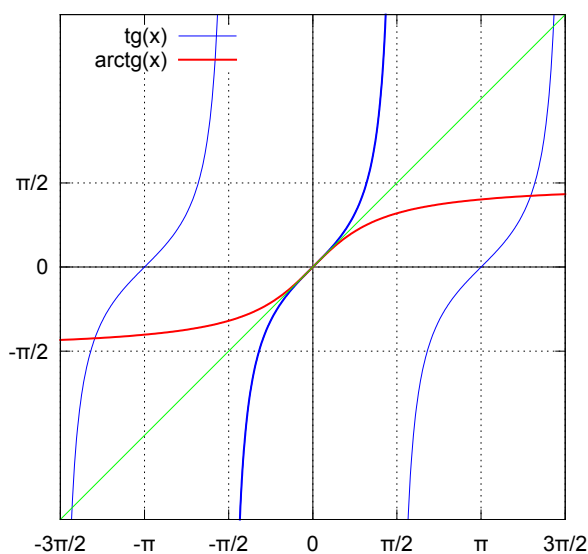
$$\text{c) } f'(x) = -2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - (4x - 1)^2}} \cdot 4$$

$$(f'(x) = \frac{8}{\sqrt{\dots}} > 0 :$$

Hamarosan látni fogjuk, hogy a szigorúan monoton növekedés ebből is következik.)

$$y_\epsilon = f\left(\frac{1}{8}\right) + f'\left(\frac{1}{8}\right) \left(x - \frac{1}{8}\right) = \frac{11\pi}{3} + \frac{16}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{8}\right), \text{ mert}$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 5\pi - 2 \underbrace{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{11\pi}{3} \quad \text{és} \quad f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

4.12. ábra. A  $\operatorname{tg}(x)$  és inverze, az  $\operatorname{arctg}(x)$  függvény

### A tangens függvény és inverze

$$f(x) = \operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  esetén folytonos. (4.12. ábra)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

A hányadosfüggvény deriválási szabályát és a függvény definícióját használjuk fel.

$$\left( \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \right)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

Invertálás:

$$f: \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \mapsto (-\infty, \infty) \quad \text{szigorúan monoton} \implies \exists f^{-1}(x)$$

$$\textcircled{D} \quad f^{-1}(x) = \boxed{\operatorname{arctg} x} :$$

Jelenti azt a  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ -be eső radiánban mért szöveget, melynek tangense  $x$ . (4.12. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\operatorname{arctg} x} = \mathbb{R}, \quad R_{\operatorname{arctg} x} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Páratlan függvény:  $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával bizonyítunk:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f(u) = \operatorname{tg} u, \quad f'(u) = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$f^{-1}'(x) = \frac{1}{f'(u)} \Big|_{u=f^{-1}(x)}$$

Ennek alapján:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 u} \Big|_{u=\operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u} \Big|_{u=\operatorname{arctg} x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Felhasználtuk az alábbi azonosságot:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \quad | : \cos^2 u \quad \implies \quad 1 + \operatorname{tg}^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$

**Pl.**

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{2+x}$$

a)  $\lim_{x \rightarrow -2 \pm 0} f(x) = ?$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = ?$

b)  $f'(x) = ?$ , ha  $x \neq -2$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} f'(x) = ?$

Létezik-e  $f'(-2)$  ?

Megoldás.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2+0} \underbrace{\operatorname{arctg} \left( \frac{\overbrace{2-x}^{-4}}{\underbrace{2+x}_{0+}} \right)}_{\rightarrow -\infty} = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow -2-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{2-x}{2+x}}_{\rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Mivel } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2-x}{2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{2}{x} + 1} = -1, \quad \text{ezért}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

b) Ha  $x \neq -2$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} \left(\frac{2-x}{2+x}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} \frac{-1 \cdot (2+x) - (2-x) \cdot 1}{(2+x)^2} = \\ &= \frac{-4}{(2+x)^2 + (2-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} f'(x) = -\frac{1}{4}$$

$f'(-2) \nexists$ , mert az  $f$  függvény nem folytonos  $x = -2$ -ben.

Így most láttunk arra példát, hogy hiába létezik az  $f'$  függvénynek határértéke  $-2$ -ben, mégsem létezik  $f'(-2)$ .

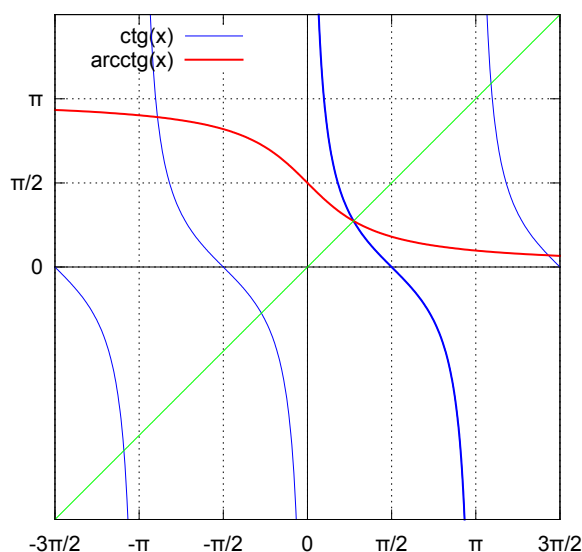
### A kotangens függvény és inverze

$$f(x) = \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

$x \neq k\pi$  esetén folytonos. (4.13. ábra)

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi$$

Most is a hányadosfüggvény deriválási szabályát és a függvény definícióját használjuk fel.

4.13. ábra. A  $\operatorname{ctg}(x)$  és inverze, az  $\operatorname{arcctg}(x)$  függvény

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi \end{aligned}$$

Invertálás:

$$f : (0, \pi) \mapsto (-\infty, \infty) \quad \text{szigorúan monoton} \implies \exists f^{-1}(x)$$

$$\textcircled{D} \quad f^{-1}(x) = \boxed{\operatorname{arcctg} x} :$$

Jelenti azt a  $(0, \pi)$ -be eső radiánban mért szöget, melynek kotangense  $x$ . (4.13. ábra)

Tulajdonságai:

$$D_{\operatorname{arcctg} x} = \mathbb{R}, \quad R_{\operatorname{arcctg} x} = (0, \pi)$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával bizonyítunk:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \operatorname{arcctg} x, & f(u) &= \operatorname{ctg} u, & f'(u) &= -\frac{1}{\sin^2 u} \\ f^{-1}'(x) &= \frac{1}{f'(u)} \Big|_{u=f^{-1}(x)} \end{aligned}$$



Ennek alapján:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 u} \Big|_{u=\operatorname{arcctg} x}} = - \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 u} \Big|_{u=\operatorname{arcctg} x} = - \frac{1}{1 + x^2}$$

Felhasználtuk az alábbi azonosságot:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \quad | : \sin^2 u \quad \implies \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u}$$

**(M)** Vigyázat!

$$\frac{\arcsin x}{\arccos x} \neq \operatorname{arctg} x; \quad \arcsin^2 x + \arccos^2 x \neq 1 \quad \text{stb.}$$

Ellenőrzés nélkül ne próbálják a trigonometrikus azonosságokat általánosítani az arkusz függvényekre!

**(Pl.)** Fejezzük ki  $\operatorname{arctg} x$  segítségével  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  és  $\operatorname{arcctg} x$  értékét!  
(A programozási nyelvekben beépített függvényként általában csak az  $\operatorname{arctg} x$  szerepel.)

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ \operatorname{tg} y &= \operatorname{tg} \arcsin x = \frac{\sin \arcsin x}{\cos \arcsin x} = \frac{x}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \implies y &= \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

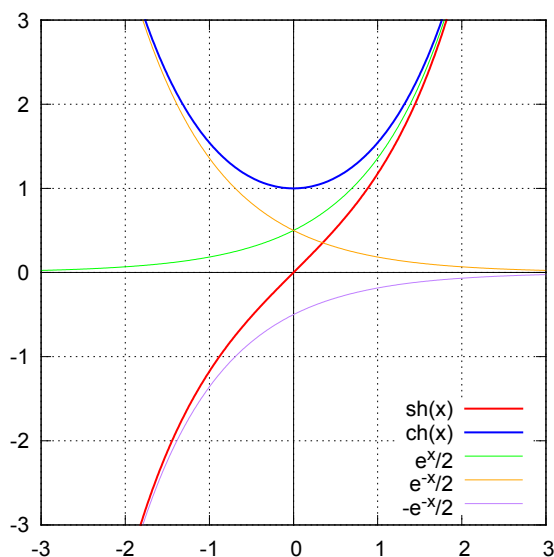
Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}; \quad \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

#### 4.2.6. Hiperbolikus függvények és inverzeik

App  
⇒

A szinusz hiperbolikus és a koszinusz hiperbolikus függvény

4.14. ábra. Az  $\operatorname{sh} x$  és  $\operatorname{ch} x$  függvény

Ⓓ

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{láncgörbe})$$

(Szinusz hiperbolikus, illetve koszinusz hiperbolikus függvények, 4.14. ábra.)

Tulajdonságok:

$\operatorname{sh} x$  páratlan,  $\operatorname{ch} x$  páros.

Ugyanis

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch}(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x \end{aligned}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad ; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

Ugyanis

$$(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

Azonosságok:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

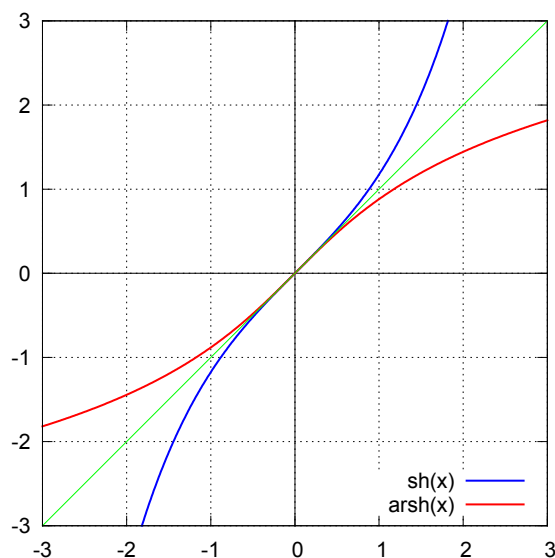
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

**Az area szinusz hiperbolikus és az area koszinusz hiperbolikus függvény**

4.15. ábra. A  $\operatorname{sh} x$  és inverze, az  $\operatorname{arsh} x$  függvény



Ⓓ  $f(x) = \operatorname{arsh} x$  : az  $\operatorname{sh} x$  függvény inverze (4.15. ábra)

Az  $f(x) = \operatorname{sh} x$  függvény szigorúan monoton a teljes értelmezési tartományban, ezért  $\exists$  az inverze, melynek jelölése:  $f^{-1}(x) = \operatorname{arsh} x$  (area szinusz hiperbolikus).

Érdekesség: a függvény kifejezhető az  $\ln$  függvény segítségével az alábbi módon:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Ugyanis:

$$y = \operatorname{arsh} x \implies \operatorname{sh} y = x \implies \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \implies (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

Ez  $e^y$ -ra másodfokú egyenlet.

$$\implies e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

A másik gyök negatív, így nem jöhet szóba  $e^y$  értékére, mely mindig pozitív.

$$\implies y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\boxed{(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Az inverzfüggvény deriválási szabályával:

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch} u} \Big|_{u=\operatorname{arsh} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}} \Big|_{u=\operatorname{arsh} x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \quad \text{miatt} \quad \operatorname{ch} u = +\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} \quad (\operatorname{ch} u > 0).$$

**D**  $\boxed{f(x) = \operatorname{arch} x}$  : a  $\operatorname{ch} x$  függvény inverze  $x \geq 0$ -ra. (4.16. ábra)

$f(x) = \operatorname{ch} x$  függvény a  $[0, \infty)$  intervallumon szigorúan monoton  $\implies \exists f^{-1}(x)$  ezen az intervallumon, melyet  $\operatorname{arch} x$  módon jelölünk és area koszinusz hiperbolikus (röviden: area ch) függvénynek nevezünk.

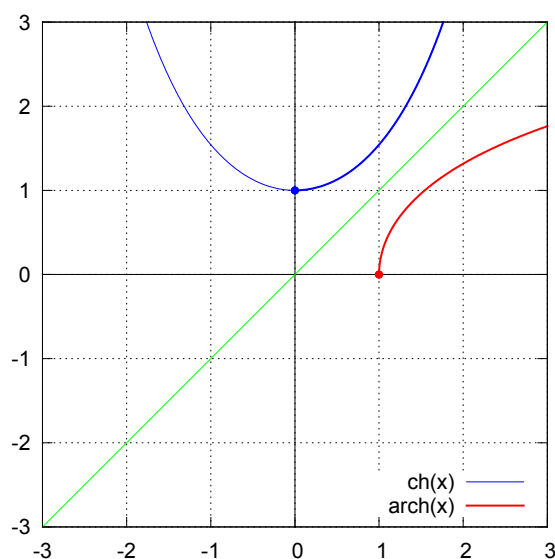
Ez a függvény is megadható az  $\ln$  függvény segítségével:

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (\neg B)$$

Deriválhatóság:

$$\boxed{(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}} \quad x > 1$$

Most is az inverzfüggvény deriválási szabályával dolgozunk:

4.16. ábra. A  $\operatorname{ch} x$  és inverze, az  $\operatorname{arch} x$  függvény

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh} u} \Big|_{u=\operatorname{arch} x} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}} \Big|_{u=\operatorname{arch} x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \quad \text{miatt} \quad \operatorname{sh} u = +\sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 u}$$

(A vizsgált intervallumon  $\operatorname{sh} u > 0$ ).

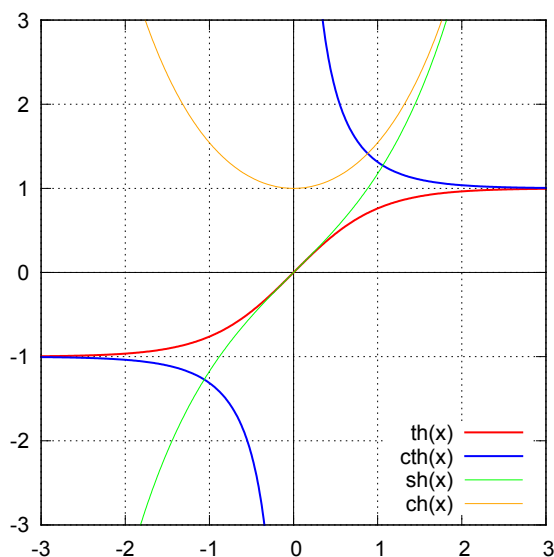
### A tangens hiperbolikus, kotangens hiperbolikus függvény és inverzük

$\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth} x$  és inverzeik  $\operatorname{arth} x$ ,  $\operatorname{arch} x$  függvények

(tangens hiperbolikus, kotangens hiperbolikus, area tangens hiperbolikus és area kotangens hiperbolikus)

$$\textcircled{D} \quad \operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad (\text{páratlan függvény, 4.17. ábra})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{e^x}{e^x}}_{=1} \frac{1 - \overbrace{e^{-2x}}^0}{1 + \underbrace{e^{-2x}}_0} = 1$$

4.17. ábra. A  $\operatorname{th} x$  és a  $\operatorname{cth} x$  függvény

$$(\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

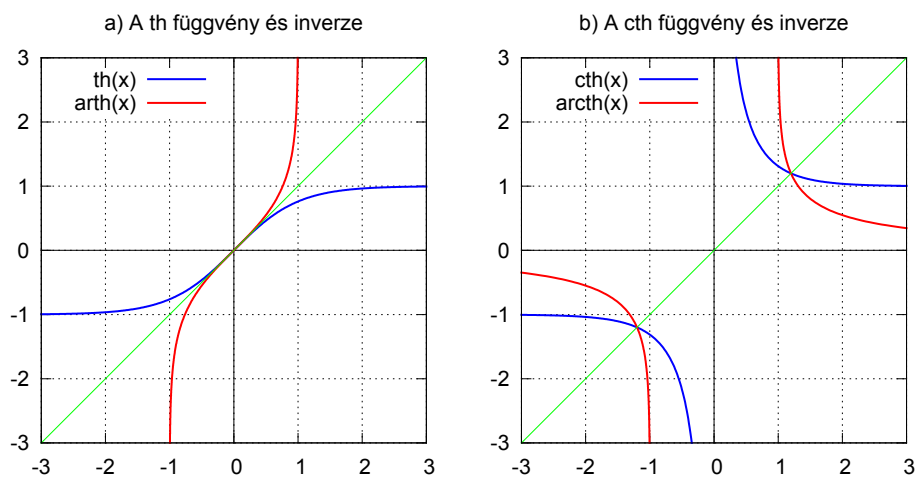
$$\textcircled{D} \quad \operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad x \neq 0 \quad (\text{páratlan, 4.17. ábra})$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Mindkettő a teljes értelmezési tartományban invertálható, mert a leképezés kölcsönösen egyértelmű (4.18. ábra).

Belátható, hogy

$$\begin{aligned} (\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, & |x| < 1 \\ (\operatorname{arcth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, & |x| > 1 \end{aligned}$$

4.18. ábra. A  $\operatorname{th}(x)$ ,  $\operatorname{arth}(x)$ , valamint a  $\operatorname{cth}(x)$  és az  $\operatorname{arcth}(x)$  függvények

## Deriválttáblázat

$f(x)$	$f'(x)$	$D_f$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$
$a^x$	$a^x \ln a$	$(-\infty, +\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(0, \pi)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(0, +\infty)$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, +\infty)$

$\alpha \in \mathbb{R}$  tetszőleges,  $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$



## 4.2.7. Néhány összetett példa az előző anyagrészhez

Pl.

$$f(x) = |(x^2 + 1)(x^3 - x^2)| \quad f'(x) = ?$$

Megoldás.

$$f(x) = (x^2 + 1)x^2 |x - 1| = (x^4 + x^2) |x - 1| = \begin{cases} (x^4 + x^2)(x - 1), & \text{ha } x \geq 1 \\ -(x^4 + x^2)(x - 1), & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$g(x) := (x^4 + x^2)(x - 1)$  : mindenütt deriválható.

A szorzatfüggvény deriválási szabályával:

$$g'(x) = (4x^3 + 2x)(x - 1) + (x^4 + x^2) \cdot 1$$

Ennek felhasználásával:

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x), & \text{ha } x > 1 \\ -g'(x), & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$x = 1$ -ben a definícióval dolgozunk:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^4 + x^2)|x - 1| - 0}{x - 1}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \underbrace{\frac{(x^4 + x^2)(x - 1)}{x - 1}}_{=x^4+x^2} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \underbrace{\frac{(x^4 + x^2)(-(x - 1))}{x - 1}}_{=-(x^4+x^2)} = -2 \neq f'_+(1)$$

$$\Rightarrow f'(1) \nexists$$

Pl.

$$f(x) = \begin{cases} (\operatorname{ch} 5x)^2, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{\sin 4x}{x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Hol folytonos és hol differenciálható az  $f$  függvény?

$$f'(x) = ? \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$$

**Megoldás.**

Ha  $x \neq 0$ , akkor  $f$  folytonos, mert folytonos függvények összetétele.  
Vizsgálандó az  $x = 0$  pontbeli viselkedés:

$$f(0 - 0) = f(0) = (\operatorname{ch} 0)^2 = 1 \quad \text{és}$$

$$f(0 + 0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$

Mivel  $f(0 - 0) \neq f(0 + 0)$ , tehát  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nem létezik, így a függvény nem folytonos  $x = 0$ -ban, ezért nem is deriválható itt, tehát  $f'(0)$  nem létezik.

$x \neq 0$ -ra a függvény deriválható és

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot (\operatorname{ch} 5x) \cdot (\operatorname{sh} 5x) \cdot 5, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{(4 \cdot \cos 4x) \cdot x - (\sin 4x) \cdot 1}{x^2}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \cdot \underbrace{\sin 4x}_{\text{korlátos}} = 0$$

**P1.**

$$g(x) = e^{2x}, \qquad h(x) = 2x^2 + \alpha x + \beta$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \geq 0 \\ h(x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Megválasztható-e  $\alpha$  és  $\beta$  értéke úgy, hogy  $f$  mindenütt differenciálható legyen?

**Megoldás.**

Mivel  $g, h$  mindenütt deriválható, ezért  $x \neq 0$  esetén  $f$  is deriválható.

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) = 2 e^{2x}, & \text{ha } x > 0 \\ h'(x) = 4x + \alpha, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Így csak  $x = 0$ -át kell vizsgálni.

A differenciálhatóság szükséges feltétele a folytonosság. Ehhez teljesülnie kell, hogy  $f(0+0) = f(0) = g(0) = 1$ , megegyezzen  $f(0-0) = h(0) = \beta$  értékével, tehát  $\beta = 1$ .

Mivel

$$f'_+0 = g'(0) = 2,$$

$$f'_-0 = h'(0) = \alpha,$$

Így a deriválhatósághoz  $\alpha = 2$  választás kell.

**Pl.**  $f(x) = \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

1.  $D_f = ?$      $R_f = ?$

2. Írja fel az  $x_0 = \frac{4}{5}$  pontbeli érintő egyenes egyenletét!

3. Mutassa meg, hogy  $f$ -nek létezik az inverze és határozza meg!

$$(f^{-1}(x) = ?)$$

**Megoldás.**

$$1. 0 \leq \frac{1}{x} - 1 \leq 1 \implies 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \implies \frac{1}{2} \leq x \leq 1: D_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\text{Itt } 0 \leq \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \leq \frac{\pi}{2} \implies \frac{\pi}{2} \leq \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \leq \pi: R_f = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$2. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x} - 1\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$x_0 = \frac{4}{5}; \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$

$$f'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{-5^2}{4^2} = \frac{-25}{8\sqrt{3}}$$

$$y_{\hat{e}} = f\left(\frac{4}{5}\right) + f'\left(\frac{4}{5}\right) \left(x - \frac{4}{5}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{25}{8\sqrt{3}} \left(x - \frac{4}{5}\right)$$

3.  $\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 1$  esetén  $f(x_1) > f(x_2)$  megmutatható (HF.)  $\implies f$  szigorúan monoton csökken  $\implies \exists f^{-1} D_f$ -en

(Vagy:

$$f' < 0 \text{ } D_f = I\text{-n} \implies f \text{ szigorúan monoton csökken} \implies \exists f^{-1} D_f\text{-en})$$

$$y = \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \implies \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \pi - y$$

$$\implies \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \cos(\pi - y) \implies \frac{1}{x} - 1 = \cos^2(\pi - y)$$

$$\implies \frac{1}{x} = 1 + \cos^2(\pi - y) \implies x = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - y)} \quad (x \leftrightarrow y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - x)} = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \quad R_{f^{-1}} = D_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

**P1.** Legyen

$$f(x) = -\frac{\pi x}{3} + \arcsin\left(\frac{2}{x}\right), \quad x \in (2, \infty)$$

- $f'(x) = ?$
- Indokolja meg, hogy a függvénynek létezik az inverze! Határozza meg az inverz függvény értelmezési tartományát!

Ellenőrizze, hogy  $f^{-1}$  grafikonja átmegy a  $\left(-\frac{7\pi}{6}, 4\right)$  ponton!

- Írja fel az inverz függvénynek ezen a ponton áthaladó érintő egyenese egyenletét!

**Megoldás.**

$$1. \quad f'(x) = -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-2}{x^2} = -\frac{\pi}{3} - \frac{2}{x\sqrt{x^2 - 4}}, \quad \text{ha } x > 2.$$

- $2 < x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) > f(x_2)$  megmutatható (HF.)  $\implies f$  szigorúan monoton csökken  $\implies \exists f^{-1} D_f$ -en

(Vagy:

$x > 2$ -re  $f'(x) < 0 \implies f$  szigorúan monoton csökken  $\implies$  invertálható)

$$x \in (2, \infty)\text{-re } \frac{2}{x} \in (0, 1) \implies \arcsin \frac{2}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\implies R_f = \left(-\infty, \frac{-2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\infty, \frac{-\pi}{6}\right) = D_{f^{-1}}$$

$$\text{Mivel } f(4) = -\frac{4\pi}{3} + \arcsin \frac{1}{2} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6} \implies f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 4$$

3. Az érintő egyenes egyenlete:

$$f^{-1}'\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{3} - \frac{2}{4\sqrt{4^2-4}}} = -\frac{12}{4\pi + \sqrt{3}}$$

$$y = \underbrace{f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}_{=4} + f^{-1}'\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \left(x - \left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 4 + \frac{-12}{4\pi + \sqrt{3}} \left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

**Pl.**  $f(x) = \operatorname{tg} \left( \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \right)$

Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Mutassa meg, hogy a teljes értelmezési tartományban létezik az inverze, és írja fel az inverz függvényt!

**Megoldás.**

$D_f = \{x : |2x-5| \leq 1\} = [2, 3]$ , mert akkor  $\left| \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \right| \leq \frac{\pi}{6}$  miatt  $\operatorname{tg}$  is értelmezett.

$$D_f\text{-en } \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \text{ értékkészlete } \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \implies R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Mivel  $2x-5$ ,  $\arcsin$  és  $\operatorname{tg}$  is szigorúan monoton növény, ezért  $f$  is az  $D_f$ -en  $\implies D_f$ -en  $\exists f^{-1}$

$$y = \operatorname{tg} \underbrace{\frac{\arcsin(2x-5)}{3}}_{\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \implies \operatorname{arctg} y = \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \implies 2x-5 =$$

$$\sin(3 \operatorname{arctg} y) \implies x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(3 \operatorname{arctg} y)$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(3 \operatorname{arctg} x); \quad D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]; \quad R_{f^{-1}} = D_f = [2, 3]$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad f(x) = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right)}$$

Adja meg az  $x = 5$  pontot tartalmazó legbővebb intervallumot, amelyen a függvény invertálható, és írja fel itt az inverz függvényt!

$$D_{f^{-1}} = ? \quad R_{f^{-1}} = ?$$

**Megoldás.**

$$x \in (4, 6) \text{ esetén } \frac{\pi}{4}x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \implies \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x \in (0, \infty) = D_{\ln}$$

Tehát  $f : (4, 6) \rightarrow (-\infty, \infty)$  egy-egyértelmű, mert az összetételben szereplő függvények mindegyike szigorúan monoton nő az érintett intervallumon  $\implies f$  szigorúan monoton nő  $\implies \exists f^{-1}$ .

Az inverz:

$$y = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right)} \implies y^3 = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right) \implies e^{(y^3)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \operatorname{tg}\left(\underbrace{\frac{\pi}{4}x - \pi}_{\in(0, \frac{\pi}{2})}\right)$$

$$\implies \operatorname{arctg} e^{(y^3)} = \frac{\pi}{4}x - \pi \implies x = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{(y^3)} + 4$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{(x^3)} + 4; \quad D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty); \quad R_{f^{-1}} = (4, 6)$$

•••

### 4.3. A differenciálszámítás középértéktételei

#### 4.3.1. Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére

(Differenciálható függvényre, az értelmezési tartomány belső pontjában)

$\textcircled{\text{D}}$   $f$ -nek lokális maximuma (minimuma) van az értelmezési tartomány belső  $x_0$  pontjában, ha  $\exists K_{x_0, \delta} : f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ), ha  $x \in K_{x_0, \delta}$ .

$\textcircled{\text{T}}$  Ha  $f$  az  $x_0$  helyen *differenciálható* és ott lokális szélsőértéke van, akkor  $f'(x_0) = 0$ .  
( $K_{x_0, \delta} \subset D_f$ )

$\textcircled{\text{B}}$  Pl. lokális maximumra (4.19.a ábra):

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\equiv} = \underbrace{f'_-(x_0) = f'(x_0)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

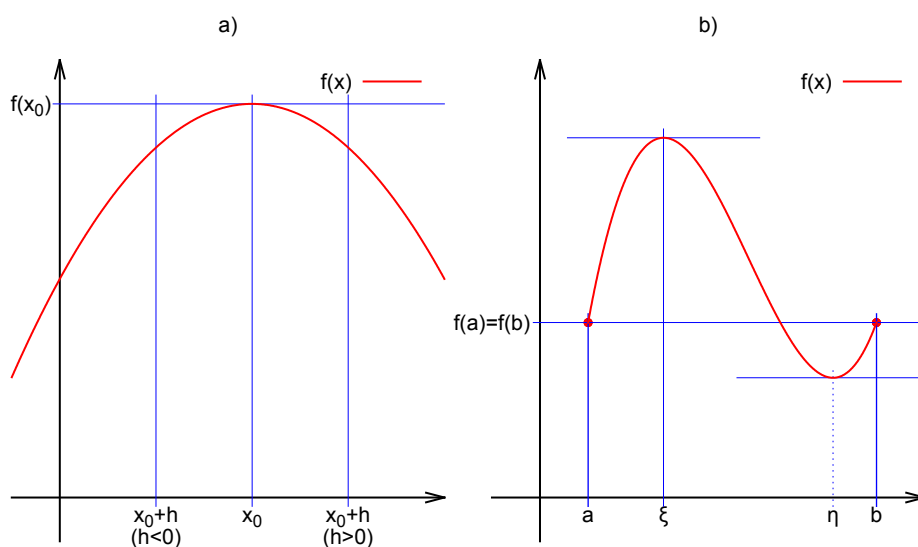
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\bar{+}} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$$

■

$\implies f'(x_0) = 0$  (vízszintes érintő)

(A  $\bar{-}$ , illetve a  $\bar{+}$  szimbólumokban a + és - jel a tört számlálójának és nevezőjének előjelére utal.)

4.19. ábra. a) Deriválható függvény lokális szélsőértékének szükséges feltétele a vízszintes érintő b) Magyarázó ábra a Rolle-tételhez



### 4.3.2. A differenciálszámítás középértéktételei

**(T) Rolle-tétel:** (4.19.b ábra)

Ha  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n és differenciálható  $(a, b)$ -n és  $f(a) = f(b)$ , akkor

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

**(B) Weierstrass II. tétele** értelmében  $f$ -nek van minimuma és maximuma. Ha mindkettőt a végpontokban veszi fel, akkor  $f(a) = f(b)$  miatt  $f(x) \equiv \text{konst.}$  és így  $\forall \xi \in (a, b)$ -re  $f'(\xi) = 0$ . Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel értelmében  $f'(\xi) = 0$  ( $\xi$  a szélsőérték hely).

Megjegyezzük, hogy  $\xi$  nem mindig egyértelmű, a 4.19.b ábrán például  $f'(\xi) = f'(\eta) = 0$ .

**(T) Lagrange-féle középértéktétel:**

Ha  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n és differenciálható  $(a, b)$ -n, akkor  $\exists \xi \in (a, b)$  :

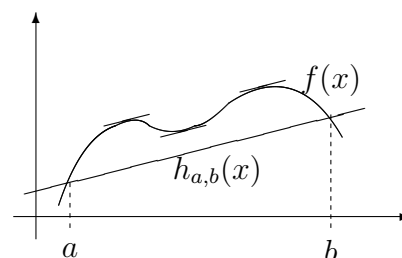
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**(B)**

$$h_{a,b}(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = h(x)$$

$$g(x) := f(x) - h(x) \quad g(a) = g(b) = 0;$$

$g$  folytonos  $[a, b]$ -n, differenciálható  $(a, b)$ -n



**Rolle-t.**  $\implies \exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = f'(\xi) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{h'(\xi)} = 0$

**(T) Cauchy-féle középértéktétel:**

Ha  $f$  és  $g$  folytonos  $[a, b]$ -n, differenciálható  $(a, b)$ -n és  $g'(x) \neq 0$ , ha  $x \in (a, b)$ , akkor  $\exists \xi \in (a, b)$  :

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**(B)**

$$h(x) := (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$$

$$h(a) = (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) = -f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

$h$  folytonos  $[a, b]$ -n, differenciálható  $(a, b)$ -n és

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b) \quad \xrightarrow{\text{Rolle-t.}} \quad \exists \xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0, \text{ vagyis}$$

$$(f(b) - f(a)) g'(\xi) - (g(b) - g(a)) f'(\xi) = 0 \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy  $g(b) - g(a) \neq 0$ , ellenkező esetben  $g(a) = g(b)$  miatt  $g$ -re alkalmazható lenne a **Rolle-tétel** és akkor  $\exists \xi \in (a, b)$ , melyre  $g'(\xi) = 0$  lenne. Így rendezéssel megkapjuk az állítást.



(M) A Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete ( $g(x) = x$ ), a Rolle-tétel pedig a Lagrange speciális esete.

(T) Ha  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n, differenciálható  $(a, b)$ -n és ott  $f'(x) \equiv 0$ , akkor

$$f(x) \equiv c \quad x \in [a, b]\text{-re}$$

(B) A Lagrange-féle középértéktétel miatt  $\forall [x_1, x_2] \subset [a, b]$ -re  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad \xi \in (a, b)$$

De mivel  $f'(\xi) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \neq x_2\text{-re} \implies f(x) \equiv \text{konst.} \quad \blacksquare$

(T) Az integrálszámítás I. alaptétele:

Ha  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n, differenciálható  $(a, b)$ -n és

$$f'(x) = g'(x), \quad \text{ha } x \in (a, b),$$

akkor  $\exists C \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

Tehát csak egy állandóban különböznek.

(B)  $h(x) := f(x) - g(x)$ -re kell alkalmazni az előző tételt.

### 4.3.3. Feladatok

1. Alkalmazható-e az

$$f(x) = x \cdot \sin \sqrt[3]{x^2}$$

függvényre a Lagrange-féle középértéktétel a  $[-1, 1]$  intervallumon?

2. Alkalmazható-e a Rolle-tétel az

$$f(x) = |\arctg x|$$

függvényre a  $[-1, 1]$  intervallumon?

3. Alkalmazható-e  $f$ -re a Lagrange-féle középértéktétel?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} + \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 0$$

Ha igen,  $\xi = ?$

4. Határozza meg a deriválás elvégzése nélkül a

$$p(x) = (x - 2,1)(x - 2,3)(x - 2,5)(x - 2,7)$$

polinom deriváltjának gyökeit 0,1-nél kisebb hibával!

5. Bizonyítsa be, hogy

a)  $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ , ahol  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$ .

b)  $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ , ahol  $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

c)  $\operatorname{tg} x - 1 > 2x - \frac{\pi}{2}$ , ha  $0 < x < \frac{\pi}{4}$

d)  $\operatorname{arsh}(1 + x^2) < 1 + \operatorname{arsh} x^2$

e)  $\sin x \leq \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ ;  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

6.  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \frac{\pi}{4}(x-1), & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$

a) Adja meg  $b$  értékét úgy, hogy  $f$ -re a  $[0, 1]$  intervallumon alkalmazható legyen a Rolle-féle középértéktétel!

b) Keressen egy olyan értéket, amely a Rolle-tétel értelmében létezik!

## 4.4. L'Hospital-szabály

App  
⇒

( $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  alakra alkalmazható közvetlenül.)

### Ⓓ L'Hospital-szabály:

Legyen  $f$  és  $g$  differenciálható  $\dot{K}_{\alpha, \delta}$ -ban és itt  $g(x) \neq 0$ ,  $g'(x) \neq 0$  és

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$$

Ha  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$ , akkor  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$ .

(Itt  $\alpha = x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty$  lehet,  $\beta = b, +\infty, -\infty$  lehet).

Ⓑ  $\alpha = x_0$ -ra bizonyítjuk.

$$f(x_0) := 0, g(x_0) := 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\text{Cauchy-féle k.é.t.}) \quad \xi \in (x, x_0) \quad (\text{ill. } \xi \in (x_0, x))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ ha ez utóbbi létezik (véges vagy } \infty)$$

Hasonló tétel bizonyítható  $\frac{\infty}{\infty}$  alakra is.

### Határozatlan alakok:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ : L'H közvetlenül alkalmazható.

$0 \cdot \infty$ : átalakítás után:  $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \vee \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$  alakkal próbálkozunk.

$$\infty - \infty: h(x) := \frac{1}{f(x)}, k(x) := \frac{1}{g(x)}, f(x) - g(x) = \frac{1}{h(x)} - \frac{1}{k(x)} = \frac{k(x) - h(x)}{h(x)k(x)} \quad \left( \frac{0}{0} \right)$$

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ :  $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$   
 $g(x) \cdot \ln f(x)$  határozatlan alakra már a megismert módon dolgozhatunk.

### Példák:

[Gy](#)

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \dots \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0 \quad (n \text{ lépés})$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{1} = 0$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - xe^{\cos x}}{-1 - \sin x + \cos x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x - e^{\cos x} + xe^{\cos x} \sin x}{-\cos x - \sin x} = \frac{3 - e}{-1}$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh } x - x}{x^3} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch } x - 1}{3x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh } x}{6x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch } x}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) \cdot \text{tg } \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\text{ctg } \left( \frac{\pi}{2} x \right)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2} x \right)} \cdot \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \\ \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos 5x) \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos 5x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5 \sin 5x}{\cos 5x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-25}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_1 \cdot \frac{1}{\cos 5x} = -\frac{25}{2}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{25}{2}}$$

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\text{ctg } x}} = ?$$

$$(1 + \cos x)^{\frac{3}{\text{ctg } x}} = e^{\ln(1 + \cos x) \frac{3}{\text{ctg } x}} = e^{\frac{3 \ln(1 + \cos x)}{\text{ctg } x}} \underset{\frac{\pi}{2}}{\downarrow} e^{3 \cdot 1} = e^3, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\text{ctg } x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{1 + \cos x} \cdot (-\sin x)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} = 1$$

$$\text{Pl. } \text{Legyen } f(x) = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}, \text{ ha } x \in (0, 1], \quad f(0) = b.$$

1.  $f'(x) = ?$ , ha  $x \in (0, 1)$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = ?$
3. Megválasztható-e  $b$  értéke úgy, hogy  $f$ -re alkalmazható legyen a Lagrange-féle középértéktétel a  $[0, 1]$  intervallumon?  
(Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!)

**Megoldás.**

$$1. \quad f(x) = e^{\frac{1}{x^4} \ln \cos x^2} \\ f'(x) = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \left( \frac{\ln \cos x^2}{x^4} \right)' = \\ = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \frac{1}{\cos x^2} \frac{(-\sin x^2) \cdot 2x \cdot x^4 - (\ln \cos x^2) \cdot 4x^3}{x^8}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x^2}{x^4} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x^2} (-\sin x^2) \cdot 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2 \cos x^2} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = -\frac{1}{2}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^4} \cdot \ln \cos x^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

3. Ha  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , azaz  $b = e^{-\frac{1}{2}}$ , akkor  $f$  folytonos  $[0, 1]$ -ben és differenciálható  $(0, 1)$ -ben, így alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel.

**Pl.** A derivált definíciója alapján mutassa meg, hogy az

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}$$

függvénynek az  $x = 0$ -ban létezik a jobb oldali deriváltja!

Írja fel az  $x = 0$  pontbeli jobb oldali érintő egyenesének egyenletét!

**Megoldás.**

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}} - 1}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}} \operatorname{sh} \sqrt{x}}{1} \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4},$$

mert  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} u}{u} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} u}{1} = 1$ , és most  $u = \sqrt{x} \rightarrow 0$ .

$$y_{\text{é}} = f(0) + f'_+(0)(x - 0) = 1 + \frac{1}{4}x, \quad x \geq 0$$

## 4.5. Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai

App  
⇒  
App  
⇒

**M** A nyílt intervallum  $I = (a, b)$  lehet  $(-\infty, \infty)$  is.

## Néhány definíció:

Ⓓ  $f$  monoton nő  $I$ -n:  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Ⓓ  $f$  szigorúan monoton nő  $I$ -n:  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$ .

Ⓓ  $f$  monoton csökken  $I$ -n:  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Ⓓ  $f$  szigorúan monoton csökken  $I$ -n:  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$ .

Ⓓ  $f$  alulról konvex  $I$ -n, ha  $\forall x_1, x_2 \in I$ -re  $f(x) \leq h_{x_1, x_2}(x)$ , ha  $x \in (x_1, x_2)$ .  
(  $h_{x_1, x_2}$  az  $x_1$ -en és  $x_2$ -n áthaladó húr.)

Ⓓ  $f$  alulról konkáv  $I$ -n, ha  $\forall x_1, x_2 \in I$ -re  $f(x) \geq h_{x_1, x_2}(x)$ , ha  $x \in (x_1, x_2)$ .  
(  $h_{x_1, x_2}$  az  $x_1$ -en és  $x_2$ -n áthaladó húr.)

Ⓓ  $f$ -nek  $x_0$ -ban inflexiós pontja van, ha  $f$  az  $x_0$ -ban folytonos, és itt konvex és konkáv szakaszok találkoznak.

Ⓓ Ha  $f$  differenciálható  $I$ -n:

$$1. f \text{ monoton nő} \iff f'(x) \geq 0$$

$$f \text{ szigorúan monoton nő} \iff f'(x) > 0$$

$$2. f \text{ monoton csökken} \iff f'(x) \leq 0$$

$$f \text{ szigorúan monoton csökken} \iff f'(x) < 0$$

Ⓓ A megértést segíti a 4.20. ábra.

1.  $\implies$ :

$$f \text{ monoton nő} \implies \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \left( \frac{\pm}{+} \text{ vagy } \frac{\mp}{-} \text{alakú} \right)$$

$$\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$$

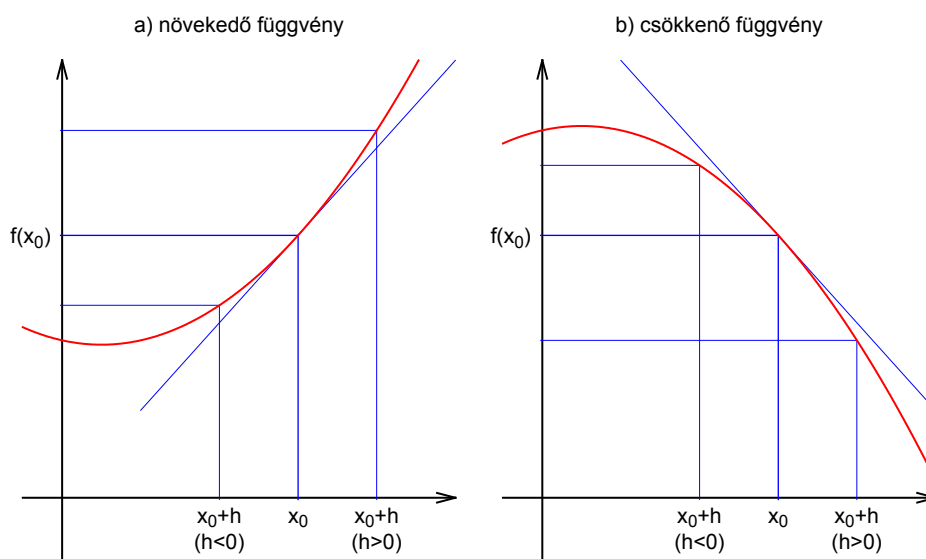
$\iff$ :

$$x_1, x_2 \in I \text{ és } x_1 < x_2 : [x_1, x_2]\text{-ben alkalmazható a Lagrange középértéktétel:}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0 \quad (\text{a feltétel miatt}) \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

$$\text{Mivel } x_2 - x_1 > 0, \text{ ezért } f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1).$$

4.20. ábra. A derivált előjelének és a monotonitásnak a kapcsolata



2. Bizonyítása lényegében megegyezik az előzővel.

Itt  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ -ból következik, hogy  $f(x_2) > f(x_1)$ . Tehát szigorúan monoton. ■

**T<sub>2</sub>** Ha  $f$  differenciálható  $I$ -n:

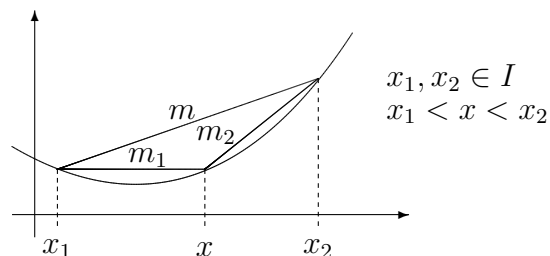
1.  $f'$  monoton nő  $\iff f$  konvex
2.  $f'$  monoton csökken  $\iff f$  konkáv

**B**

1. Csak  $\Leftarrow$  irányban bizonyítjuk.  
Az ábra alapján a konvexitásból következik, hogy  $\forall x \in (x_1, x_2)$ -re:

$$m_1 \leq m \leq m_2.$$

Így  $\lim_{x \rightarrow x_1} m_1 = f'(x_1) \leq m \leq f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} m_2$ , vagyis  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ , tehát  $f'$  monoton nő.



2. A második állítás bizonyítása az elsőhöz hasonló. ■

(M)

$$f'(x_1) \leq m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

Ebből

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \forall x_1 < x_2\text{-re, ill.}$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad \forall x_1 < x_2\text{-re.}$$

Tehát konvex görbe az érintője felett halad az érintési pontot kivéve.  
(Konkáv görbe pedig az érintője alatt halad az érintési pontot kivéve.)

(T<sub>3</sub>) Ha  $f$  kétszer differenciálható  $I$ -n:

1.  $f''(x) \geq 0 \iff f$  konvex

2.  $f''(x) \leq 0 \iff f$  konkáv

(B)

$$\begin{array}{l} 1. f''(x) \geq 0 \xrightarrow{T_1 \text{ miatt}} f' \text{ monoton nő} \xrightarrow{T_2 \text{ miatt}} f \text{ konvex} \\ f''(x) \leq 0 \xleftarrow{T_1 \text{ miatt}} f' \text{ monoton nő} \xleftarrow{T_2 \text{ miatt}} f \text{ konvex} \end{array} \quad \blacksquare$$

(M) Az állítások igazak maradnak, ha  $I$  zárt és  $f$  a zárt intervallumban folytonos, nyíltban differenciálható.

Gy  
→

## Példák

(Pl.)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x$

$$f'(x) = x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$$

$$f''(x) = 2x - 7$$

$x$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 6)$	6	$(6, \infty)$
$f'$	+	0	-	0	+
$f$	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

$$f(1) = \frac{17}{6} \quad f(6) = -18$$



$x$	$(-\infty, \frac{7}{2})$	$\frac{7}{2}$	$(\frac{7}{2}, \infty)$	$f\left(\frac{7}{2}\right) < 0$
$f''$	$-$	$0$	$+$	
$f$	$\cap$	infl. pont	$\cup$	

**P1.**  $f(x) = e^{2x} - (4x + 1)$

- Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken  $f$  monoton növekedő, illetve fogyó.
- Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken  $f$  konvex, illetve konkáv.

**Megoldás.**

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4 = 0 \implies e^{2x} = 2 \implies 2x = \ln 2 \implies x = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

$x$	$(-\infty, \ln \sqrt{2})$	$\ln \sqrt{2}$	$(\ln \sqrt{2}, \infty)$
$f'$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f''(x) = 4e^{2x} > 0$$

$f$  monoton csökken  $(-\infty, \ln \sqrt{2})$ -n, monoton nő  $(\ln \sqrt{2}, \infty)$ -en.

$f$  konvex  $(-\infty, \infty)$ -en.

**P1.** Legyen

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol  $f$  monoton nő,  $f$  monoton csökken,  $f$  konvex,  $f$  konkáv!

**Megoldás.**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{Nem intervallum!})$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x - 2)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)^2 - e^x 2(e^x - 1)e^x}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^4} (1 - e^{2x})$$

$f'(x) > 0$ :  $f$  szigorúan monoton nő a  $(-\infty, 0)$  és a  $(0, \infty)$  intervallumon.

$f''(x) > 0$ , ha  $x < 0$ :  $(-\infty, 0)$  intervallumon  $f$  konvex

$f''(x) < 0$ , ha  $x > 0$ :  $(0, \infty)$  intervallumon  $f$  konkáv

## 4.6. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai

Ⓓ  $f$   $x_0$ -ban lokálisan növekedő, ha  $\exists K_{x_0, \delta}$  :  
 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ -ra  $f(x) \leq f(x_0)$  és  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ -ra  $f(x_0) \leq f(x)$ .

Ⓓ  $f$   $x_0$ -ban lokálisan csökkenő, ha  $\exists K_{x_0, \delta}$  :  
 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ -ra  $f(x) \geq f(x_0)$  és  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ -ra  $f(x_0) \geq f(x)$ .

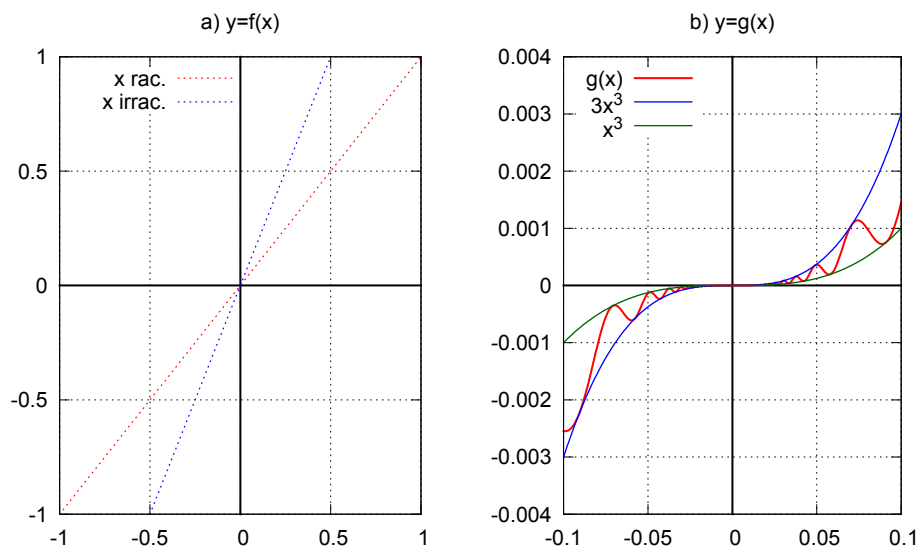
A következő példában két olyan függvényt mutatunk, melyek az origóban lokálisan növekedők, mégis az origónak olyan környezetébe, melyben a függvény növekedő lenne.

Pl.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \text{ (racióális);} \\ 2x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ (irracióális);} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$$

A 4.21. ábráról látható, hogy mindkét függvény lokálisan növekedő az origóban, de nem létezik olyan  $\delta > 0$ , melyre a függvények a  $(-\delta, \delta)$  nyílt intervallumon monoton növekedők lennének.

4.21. ábra. a) Az  $f(x)$  függvény vázlatos grafikonja b) A  $g(x)$  függvény grafikonja



Ⓓ Ha  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban és

1.  $f$  lokálisan nő  $x_0$ -ban  $\implies f'(x_0) \geq 0$

2.  $f$  lokálisan nő  $x_0$ -ban  $\iff f'(x_0) > 0$

Ⓔ

1.  $\lim_{h \rightarrow -0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{=} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \geq 0$

$\lim_{h \rightarrow +0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\pm} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0$

2.  $\underbrace{f'(x_0)}_A = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\circledast} > 0 \quad (A - \varepsilon < \circledast < A + \varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{f'(x_0)}{2})$

$0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \frac{3}{2}f'(x_0), \quad \text{ha } |h| < \delta(\varepsilon).$

Tehát  $K(x_0, \delta)$ -ban  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \implies f$  lokálisan nő  $x_0$ -ban.

Ⓓ  $K(x_0, \delta) \subset D_f$  (belső pont);  $K(x_0, \delta) \subset D_{f'}$

Differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésének

1. szükséges feltétele:  $f'(x_0) = 0$

2. elégséges feltétele:

a)  $f'(x_0) = 0$  és  $f'$  előjelet vált  $x_0$ -ban (tehát  $f'$  lokálisan csökken vagy lokálisan nő  $x_0$ -ban)

b) Ha  $f$  kétszer differenciálható  $x_0$ -ban:  $f'(x_0) = 0$  és  $f''(x_0) \neq 0$   
( $f''(x_0) > 0$  : lok. min.;  $f''(x_0) < 0$  : lok. max.)

Ⓔ

1. a Rolle-tétel előtt volt

2. a)  $f'$  lokálisan csökken:

	$(x_0 - \delta, x_0)$	$x_0$	$(x_0, x_0 + \delta)$
$f'$	$+$ ( $\geq 0$ )	0	$-$ ( $\leq 0$ )
$f$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

$f'$  lokálisan nő:

	$(x_0 - \delta, x_0)$	$x_0$	$(x_0, x_0 + \delta)$
$f'$	$-$	0	$+$
$f$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

- b)  $f''(x_0) > 0 \implies f'$  lok. nő  $x_0$ -ban és  $f'(x_0) = 0 \implies$  lok. min.  
 $f''(x_0) < 0 \implies f'$  lok. csökken  $x_0$ -ban és  $f'(x_0) = 0 \implies$  lok. max. ■

Ⓜ A tétel második pontja csak elégséges feltételt ad, ezt mutatja az alábbi példa:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Az  $f(x)$  függvény grafikonja a 4.22 ábrán látható. A függvény mindenütt deriválható. Az origóban a definícióval kell dolgoznunk.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\downarrow 0} \underbrace{\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}_{\text{korlátos}} = 0 \end{aligned}$$

Tehát a szükséges feltétel teljesül.

De  $f'$  nem vált előjelet  $x_0 = 0$ -ban, mert annak minden jobb és bal oldali környezetében is felvesz  $+$  és  $-$  értékeket is annak megfelelően, hogy minden ilyen környezetben vannak  $f$ -nek szigorúan monoton növekedő és csökkenő szakaszai. Mégis van lokális szélsőértéke  $x_0 = 0$ -ban, sőt abszolút minimuma van itt.

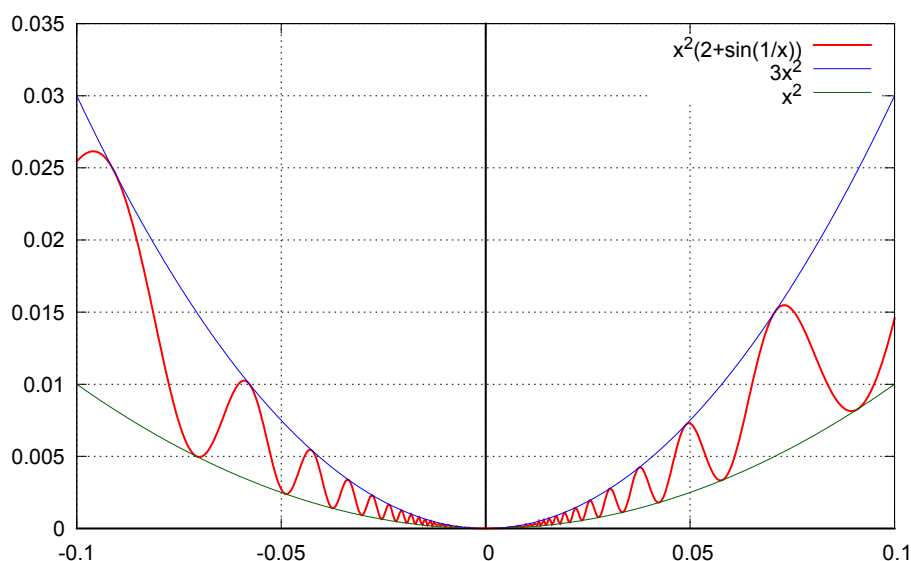
Ⓣ  $K(x_0, \delta) \subset D_{f''}$

*Kétszer differenciálható függvény esetén inflexiós pont létezésének*

1. szükséges feltétele:  $f''(x_0) = 0$

2. elégséges feltétele:

- a)  $f''(x_0) = 0$  és  $f''$  előjelet vált  $x_0$ -ban ( $f''$  lokálisan nő vagy lokálisan csökken  $x_0$ -ban)  
 b)  $f''(x_0) = 0$  és  $f'''(x_0) \neq 0$

4.22. ábra. Az  $f(x)$  függvény grafikonja

ⓑ

1. Az inflexiós pont konvex és konkáv szakaszokat választ el.

Ha  $f$  konvex, akkor  $f'$  monoton nő. Ha  $f$  konkáv, akkor  $f'$  monoton csökken. Tehát  $f'$ -nek  $x_0$ -ban lokális szélsőértéke van, hiszen  $\nearrow \searrow$  vagy  $\searrow \nearrow$  típusú  $\implies \frac{d}{dx} f' \Big|_{x_0} = f''(x_0) = 0$

2. a)

	$(x_0 - \delta, x_0)$	$x_0$	$(x_0, x_0 + \delta)$
$f''$	+	0	-
$f$	∪	infl. pont	∩

	$(x_0 - \delta, x_0)$	$x_0$	$(x_0, x_0 + \delta)$
$f''$	-	0	+
$f$	∩	infl. pont	∪

- b) Ha  $f'''(x_0) > 0 \implies f''$  növekedően halad át  $x_0$ -on, tehát a 2. táblázat igaz. Ha  $f'''(x_0) < 0 \implies f''$  csökkenően halad át  $x_0$ -on, tehát az 1. táblázat igaz. ■

ⓑ. Igaz-e, hogy  $g'(x_0) = 0$  esetén  $g$ -nek  $x_0$ -ban lokális szélsőértéke van vagy inflexiója?

**Megoldás.**

Nem igaz. Például

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

A 4.21. ábrán látható a függvény ( b) ábra).

$g$  mindenütt deriválható,  $x = 0$ -ban a definícióval:

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^2}_{\downarrow 0} \underbrace{\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)}_{\text{korlátos}} = 0$$

Ennek ellenére a függvénynek sem lokális szélsőértéke, sem inflexiója nincs az origóban.

De kimondható a következő tétel:

**(T)** Ha  $f$   $x_0$ -ban legalább  $n$ -szer differenciálható és  
 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ , de  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ,  
akkor

$f$ -nek inflexiós pontja van  $x = 0$ -ban, ha  $n$  páratlan,

$f$ -nek lokális szélsőértéke van  $x = 0$ -ban, ha  $n$  páros ( $f^{(n)}(x_0) > 0$  esetén lokális minimum,  $f^{(n)}(x_0) < 0$  esetén lokális maximum).

(A tételt nem bizonyítjuk.)

**Példák**

**(Pl.)**  $f(x) = (x - 1)^3(x + 3)^2$  Keresse meg a függvény lokális szélsőértékeit!

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x - 1)^2(x + 3)^2 + (x - 1)^3 \cdot 2(x + 3) = \\ &= (x - 1)^2(x + 3)(3(x + 3) + 2(x - 1)) = (x - 1)^2(x + 3)(5x + 7) \end{aligned}$$

	$(-\infty, -3)$	$-3$	$(-3, -\frac{7}{5})$	$-\frac{7}{5}$	$(-\frac{7}{5}, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'$	+	0	-	0	+	0	+
$f$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	0	$\nearrow$

**(Pl.)** Határozza meg az  $f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x$  függvény inflexiós pontjait!

**Megoldás.**

$$f'(x) = 3 \cos^2 x (-\sin x) + 3 \sin x = -3 \cos^2 x \sin x + 3 \sin x$$

$$f''(x) = 6 \cos x \sin^2 x - 3 \cos^3 x + 3 \cos x = 3 \cos x (2 \sin^2 x - \underbrace{\cos^2 x + 1}_{=\sin^2 x}) = 3^2 \cos x \sin^2 x$$

$$f''(x) = 0:$$

1.  $\cos x = 0 : x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  inflexiós helyek, mert  $f''$  előjelet vált ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
2.  $\sin x = 0 : x = k\pi$  pontokban nincs inflexió, mert  $f''$  nem vált előjelet.

**Pl.**

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x + 2)^3}$$

- a) Hol és milyen típusú szakadása van a függvénynek?
- b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken  $f$  szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!  
Hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van?

**Megoldás.**

- a) ÉT.:  $x \neq -2$  (Egyébként a függvény folytonos.)

$$f(-2+0) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{\overbrace{x-4}^{-6}}{\underbrace{(x+2)^3}_{\downarrow 0}} = -\infty, \quad f(-2-0) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{\overbrace{x-4}^{-6}}{\underbrace{(x+2)^3}_{\downarrow 0}} = \infty$$

Tehát  $x = -2$ -ben másodfajú szakadás van.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{1 \cdot (x+2)^3 - (x-4) \cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{x+2 - 3(x-4)}{(x+2)^4} = \\ &= \frac{-2x+14}{(x+2)^4} = \frac{2(7-x)}{(x+2)^4} \end{aligned}$$

Az értelmezési tartományban ( $x \neq -2$ ) a nevező a páros kitevőnek köszönhetően mindig pozitív, így elég a számláló jeltartását vizsgálni.

$x$	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 7)$	$7$	$(7, \infty)$
$f'$	$+$	$\neq$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\nearrow$	szak.hely	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Tehát  $f$  szigorúan monoton nő:  $(-\infty, -2)$  és  $(-2, 7)$  intervallumokon,

$f$  szigorúan monoton csökken:  $(7, \infty)$ -en.

$x = 7$ -ben lokális maximum van, mert  $f$  növekvőből csökkenőbe megy át.

**P1.** Vizsgálja meg az  $f(x) = \sqrt{x}$  függvényt ( $x > 0$ ) monotonitás szempontjából, határozza meg a függvény lokális szélsőértékeit, valamint az origóban és a végtelenben vett határértékét!

**Megoldás.**

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x} \implies D_f = (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

(A kitevő  $-\infty \cdot \infty$  alakú, így  $-\infty$ -hez tart.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$\infty$  alakú

$$f'(x) = \left( e^{\frac{\ln x}{x}} \right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left( \frac{\ln x}{x} \right)' = \sqrt{x} \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x^2} (1 - \ln x)$$

$$f'(x) = 0, \quad \text{ha} \quad 1 - \ln x = 0 \implies x = e$$

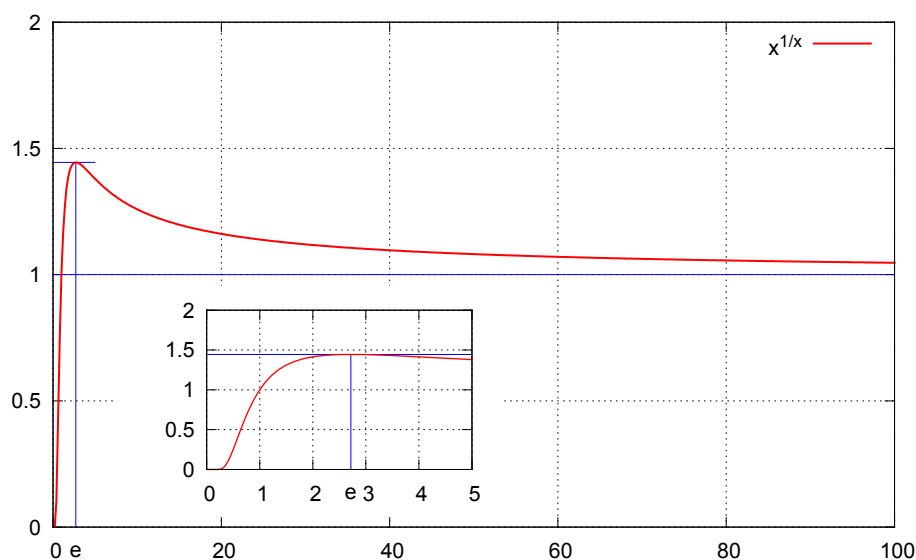
$x$	$(0, e)$	$e$	$(e, \infty)$
$f'$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

A függvény grafikonja a 4.23. ábrán látható.

**P1.** Határozza meg az  $a_n = \sqrt[n]{n}$  sorozat legnagyobb elemét!

Az előző példában vázlatosan ábrázoltuk az  $f(x) = \sqrt{x}$  függvényt. Látható, hogy a maximális függvényérték az  $f(e) = \sqrt[e]{e}$  szám  $\implies$ , a sorozat legnagyobb eleme  $\sqrt{2}$  és  $\sqrt[3]{3}$  közül a nagyobbik.



4.23. ábra. Az  $f(x) = \sqrt[x]{x}$  függvény grafikonja

Tehát a sorozat legnagyobb eleme:  $\sqrt[3]{3}$

$$\textcircled{\mathbf{T}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\textcircled{\mathbf{B}} \quad f(x) := \sqrt[x]{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$\infty$  alakú

Az [átviteli elv](#) miatt tetszőleges  $x_n \rightarrow \infty$  pontsorozat esetén  $f(x_n) \rightarrow 1$ .

Így  $x_n = n$  választással adódik, hogy  $f(x_n) = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

## 4.7. Implicit megadású függvények deriválása

Vizsgáljunk két mennyiséget,  $x$ -et és  $y$ -t, melyekről tudjuk, hogy valamilyen jól meghatározott módon függnek egymástól. Két lehetőség van e függés megadására. Az első, ha az egyik változót, például  $y$ -t megadjuk, mint  $x$  függvényét  $y = f(x)$  alakban. Ilyenkor *explicit* függvényt megadásról beszélünk. Sokszor azonban nincs mód erre, ilyenkor egy

$\Phi(x, y) = 0$  összefüggést adunk meg, mely jellemzi az összetartozó  $x$  és  $y$  értékeket. Ilyenkor *implicit* kapcsolatmegadásról beszélünk.

Felmerül a kérdés, hogy explicit megadás hiányában elő lehet-e állítani a  $\frac{dy}{dx}$  differenciálhányadost. Meglepő módon a kérdésre igenlő választ adhatunk, ha csak egy ismert  $(x_0, y_0)$  helyen keressük a differenciálhányadost. Sőt, egy rögzített pontban elvben tetszőleges magasabb rendű derivált is megkapható az úgynevezett *implicit deriválás* módszerével. A módszert a következő példák mutatják be:

Gy  
→

**P1.** A deriválható  $y = y(x)$  függvény kielégíti a

$$(2x + 1) \ln(2 - y^2) + \frac{x}{y} + x^2 = 0$$

implicit függvénykapcsolatot,  $y(-1) = 1$ .

Írja fel ezen függvény  $x_0 = -1$  pontbeli érintőegyenésének egyenletét!

### Megoldás.

Ellenőrizzük, hogy a  $(-1, 1)$  pont kielégíti-e az adott egyenletet!

$$-1 \cdot \ln 1 + \frac{-1}{1} + 1 = 0 \quad \text{valóban teljesül.}$$

Az érintőegyenés egyenlete:  $y_e = \underbrace{y(-1)}_{=1} + \underbrace{y'(-1)}_{=?} (x - (-1))$

A deriváltat a

$$(2x + 1) \ln(2 - y^2(x)) + \frac{x}{y(x)} + x^2 = 0$$

egyenlet  $x$  szerinti deriválásával kaphatjuk meg.

$$2 \cdot \ln(2 - y^2(x)) + (2x + 1) \cdot \frac{1}{2 - y^2(x)} (-2y(x) y'(x)) + \frac{1 \cdot y(x) - x \cdot y'(x)}{y^2(x)} + 2x = 0$$

Elvégezve az  $x = -1$  helyettesítést és figyelembe vesszük, hogy  $y(-1) = 1$ :

$$2 \cdot \ln 1 + (-1) \frac{1}{2 - 1} (-2 \cdot 1 \cdot y'(-1)) + \frac{1 - (-1)y'(-1)}{1^2} + 2(-1) = 0$$

$$2y'(-1) + 1 + y'(-1) - 2 = 0 \quad \implies \quad y'(-1) = \frac{1}{3}$$

Így az érintőegyenés egyenlete:  $y_e = 1 + \frac{1}{3}(x + 1)$

**P1.** Az  $y = y(x)$  kétszer folytonosan differenciálható függvény grafikonja átmegy az  $x = 0$ ,  $y = 1$  ponton és kielégíti az

$$y + x \ln y + 2x^2 - x + \ln(1 + x) = 1$$

implicit egyenletet, ha  $x > -1$ .

Milyen lokális tulajdonsága van  $f$ -nek az  $x = 0$ -ban?

**Megoldás.**

Mindkét oldalt  $x$  szerint deriválva:

$$y'(x) + \ln(y(x)) + x \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) + 4x - 1 + \frac{1}{1+x} = 0$$

$x = 0$ ,  $y(0) = 1$ -et behelyettesítve:

$$y'(0) + \ln 1 + 0 + 0 - 1 + 1 = 0 \implies y'(0) = 0 \quad \text{lok. szé. lehet.}$$

Ismét deriválva:

$$y''(x) + \frac{1}{y(x)} y'(x) + 1 \cdot \frac{1}{y(x)} y'(x) + x \frac{-y'(x)}{y^2(x)} y'(x) + x \frac{1}{y(x)} \cdot y''(x) + 4 - \frac{1}{(1+x)^2} = 0$$

Behelyettesítve:

$$y''(0) + 4 - 1 = 0, \quad y''(0) = -3 \implies \text{lok. max. van } x = 0\text{-ban (értéke } y(0) = 1\text{).}$$

Mivel  $y''(0) \neq 0 \implies$  nincs inflexiós pont itt.

**P1.** Milyen lokális tulajdonsága van az  $f$  függvénynek az  $x_0 = 0$  pontban, ha  $f$  kétszer folytonosan differenciálható és az  $y = f(x)$  egyváltozós függvény kielégíti az

$$x \operatorname{sh} x - y \operatorname{ch} y = 0$$

implicit függvénykapcsolatot?

**Megoldás.**

$$0 \cdot \operatorname{sh} 0 - y_0 \operatorname{ch} y_0 = 0 \implies y_0 = 0 = f(0)$$

$$\operatorname{sh} x + x \cdot \operatorname{ch} x - y' \operatorname{ch} y - y(\operatorname{sh} y) \cdot y' = 0$$

$$0 + 0 - y' - 0 = 0 \implies y'(0) = 0$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - y'' \operatorname{ch} y - y'(\operatorname{sh} y)y' - y'(\operatorname{sh} y)y' - y(\operatorname{ch} y)y'y' - y(\operatorname{sh} y)y'' = 0$$

$$1 + 1 + 0 - y''(0) - 0 - 0 - 0 - 0 = 0 \implies y''(0) = 2 \text{ és } y'(0) = 0, \text{ tehát lokális minimuma van.}$$

## 4.8. Egyenes aszimptota $\pm\infty$ -ben

**(D)** A  $g(x) = Ax + B$  egyenes az  $f$  függvény lineáris aszimptotája a  $+\infty$ -ben ( $-\infty$ -ben), ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \right)$$

**(Pl.)**  $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ -nek  $g(x) = x + 2$  lineáris aszimptotája  $\pm\infty$ -ben.

Ha  $\exists +\infty$ -ben aszimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax - B) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot \left( \frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) \right) = 0 \text{ miatt}$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) = 0\text{-nak fenn kell állnia.}$$

Vagyis  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A$  szükséges feltétele az aszimptota létezésének.

De nem elégséges, mert még kell, hogy ezzel az  $A$ -val:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax - B) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = B$$

( $x \rightarrow -\infty$ -re hasonlóan).

Tehát  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - Ax) = B \iff \exists$  lineáris aszimptota.

**(Pl.)**  $f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$  Van-e lineáris aszimptotája  $+\infty$ -ben?

**Megoldás.**

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{x}} = 1$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( xe^{\frac{2}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad h := \frac{2}{x} \quad = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{\frac{1}{2} \cdot h} = 2$$

$$\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ nevezetes határérték} \right)$$

(L'H-lal is megoldható, de hogyan?) Tehát  $g_a = x + 2$ .

## 4.9. Függvényvizsgálat

Teendők:

- $D_f$ ; nullahelyek (ha megállapítható); periodicitás; paritás; határértékek:  $+\infty$ -ben,  $-\infty$ -ben (ha van értelme), a szakadási pontokban, határpontokban.

2.  $f'$  vizsgálata ( $\nearrow, \searrow$ , lok. szé.).
3.  $f''$  vizsgálata ( $\cap, \cup$ , infl. pont)
4. Lineáris aszimptoták.
5.  $f$  ábrázolása,  $R_f$  meghatározása.

#### 4.9.1. Folytonos függvények zárt intervallumbeli szélsőértékei (abszolút szélsőértékek)

App  
 $\Rightarrow$ 

Zárt intervallumban folytonos függvénynek van minimuma és maximuma ([Weierstrass II. tétele](#)). Lehetséges helyek:

- ahol a függvény nem deriválható
- deriválható és lokális szélsőérték hely (elég a szükségességet vizsgálni)
- az intervallum végpontjaiban

Végül a szóbajövő értékek közül kell kiválasztani a legnagyobbat és a legkisebbet.

#### Példák:

Gy  
 $\rightarrow$ 

**P1.** Milyen méretezésű legyen az az 1 liter űrtartalmú konzervdoboz, amelyet minimális anyagfelhasználással akarunk elkészíteni?

#### Megoldás.

$$T(r, h) = r^2 \pi h = 1 \text{ dm}^3 \quad \text{és} \quad F(r, h) = 2 r^2 \pi + 2 r \pi h$$

Az első egyenletből kifejezve  $h$ -t

$$h = \frac{1}{r^2 \pi}$$

és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$f(r) := F\left(r, \frac{1}{r^2 \pi}\right) = 2 r^2 \pi + 2 r \pi \frac{1}{r^2 \pi} = 2 r^2 \pi + \frac{2}{r}, \quad r > 0.$$

Így egy egyváltozós függvény szélsőérték feladatához jutottunk.

$$f'(r) = 4r\pi - \frac{2}{r^2} = 2 \frac{2r^3\pi - 1}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

$r$	$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}, \infty\right)$
$f'$	-	0	+
$f$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

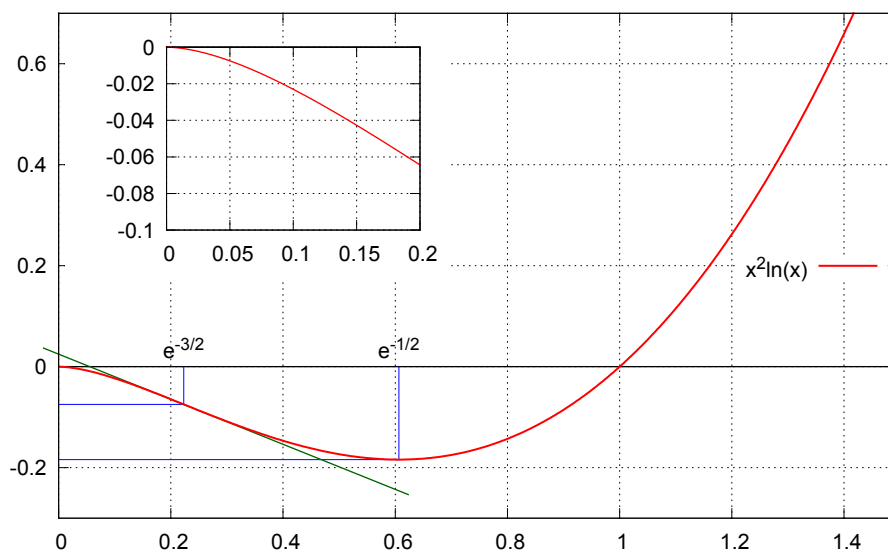
A lokális minimum egyben abszolút minimum is.

Tehát a minimális anyagfelhasználáshoz:

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \text{ dm}, \quad h = \frac{1}{r^2 \pi} \Big|_{r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ dm}$$

**Pl.**  $f(x) = x^2 \ln x$  Végezzen függvényvizsgálatot!

4.24. ábra. Az  $y = x^2 \ln x$  függvény grafikonja



**Megoldás.**

$$D_f = (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{1}{2} x^2 = 0$$

$$\text{Nullahely: } \ln x = 0 \implies x = 1$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = 0 \implies \ln x = -\frac{1}{2} \implies x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$x$	$\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\left(e^{-\frac{1}{2}}, \infty\right)$
$f'$	-	0	+
$f$	↘	lok. min.	↗

$$f''(x) = 2 \ln x + 3 = 0 \implies x = e^{-\frac{3}{2}}$$

$x$	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$(e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$
$f''$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\cap$	infl. pont	$\cup$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e} \quad f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3}{2e^3} \quad R_f = \left[-\frac{1}{2e}, \infty\right)$$

Aszimptota:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = \infty \implies$  nincs egyenes aszimptota.

A függvény grafikonja a 4.24. ábrán látható.

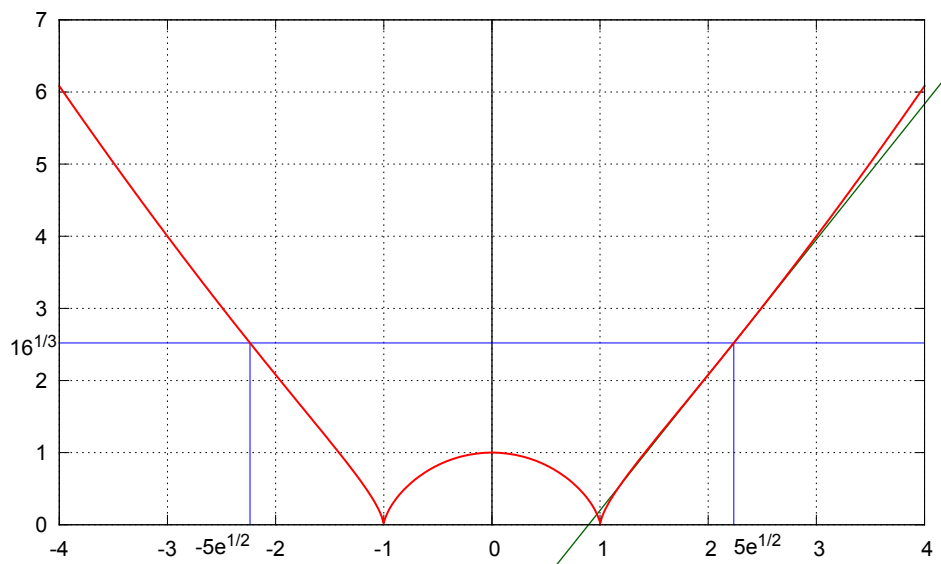
HF. Hány valós gyöke van az  $x^2 \ln x - a = 0$  egyenletnek? ( $a \in \mathbb{R}$ )

**Pl.** Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot, és ábrázolja a függvényt! Van-e a függvénynek egyenes aszimptotája a  $+\infty$ -ben?

4.25. ábra. Az  $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$  függvény grafikonja



**Megoldás.**  $D_f = \mathbb{R}$  Nullahelyek:  $x = \pm 1$

Páros függvény, ezért elég  $x \geq 0$ -ra vizsgálni és tükrözni az  $y$  tengelyre.

Van-e lineáris aszimptota  $+\infty$ -ben?

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x^3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = \infty\end{aligned}$$

Nincs lineáris aszimptota.

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-1}} = \#$$

$x$	$\dots (-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, \infty)$
$f'$	$+$	$0$	$-$	$\#$	$+$
$f$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{4}{3} \frac{(x^2-1) - \frac{2}{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \frac{4}{9} \frac{x^2-5}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

$x$	$[0, 1)$	$1$	$(1, \sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5}, \infty)$
$f''$	$-$	$\#$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\cap$		$\cap$	infl. pont	$\cup$

$$f(\sqrt{5}) = \sqrt[3]{16}, \quad f'(\sqrt{5}) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}} \quad R_f = [0, \infty)$$

A függvény grafikonja a 4.25. ábrán látható.

**(Pl.)**  $f(x) = \sqrt[3]{2x-8} - \frac{2}{3}x + 3$   
Keresse meg  $f$  szélsőértékeit a  $\left[0, \frac{9}{2}\right]$  intervallumon!

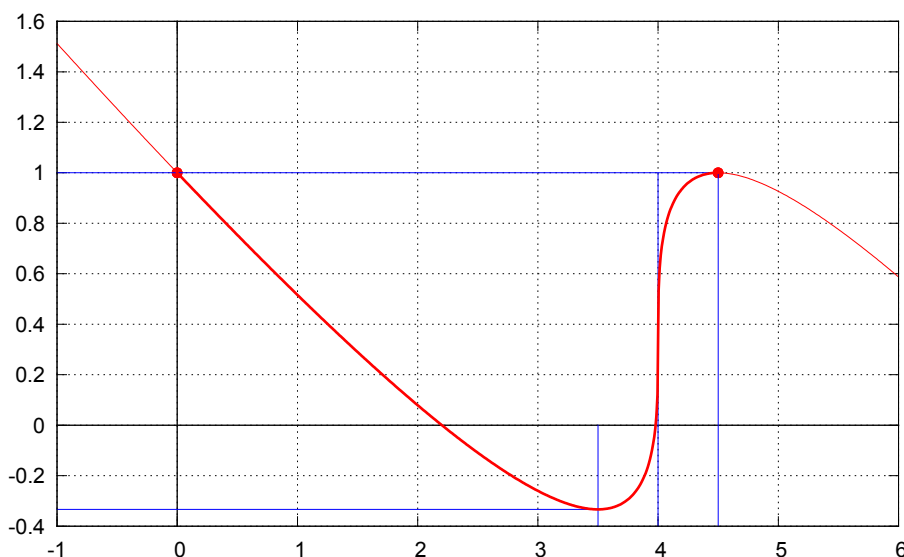
**Megoldás.**

$f$  folytonos  $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ -en  $\stackrel{\text{W. II. t.}}{\implies} \exists$  min. és max.

Ahol nem deriválható:  $x = 4 \in I$ :  $f(4) = \frac{1}{3}$

Az intervallum végpontjai:  $f(0) = 1$ ,  $f\left(\frac{9}{2}\right) = 1$



4.26. ábra. Az  $f(x) = \sqrt[3]{2x - 8} - \frac{2}{3}x + 3$  függvény grafikonja

Ahol differenciálható és lokális szélsőértéke lehet:  $f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 8)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 - \frac{2}{3} = 0 \implies (2x - 8)^{-\frac{2}{3}} = 1 \implies 2x - 8 = \pm 1 \implies x = \frac{9}{2}, \frac{7}{2} \quad f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{1}{3}$

A függvény grafikonja a 4.26. ábrán látható.

Tehát a fenti értékek közül kiválasztva, a maximum  $x = 0$ -ban, ill.  $x = \frac{9}{2}$ -ben van, értéke: 1, a minimum pedig  $x = \frac{7}{2}$ -ben, értéke:  $-\frac{1}{3}$ .

## 4.10. Paraméteres megadású görbék

Gy  
App  
App

Sok alkalmazásnál valamely görbe egyenlete nem  $y = f(x)$  alakban van megadva, hanem az  $x$  és  $y$  koordináta egy harmadik változó, az ún. paraméter függvényében van megadva, tehát egy paraméteres egyenletrendszerrel:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Ha pl.  $t$  idő, akkor az  $(x(t), y(t))$  egy mozgó pont  $t$  időpontbeli helyzete. Ugyanannak a görbének végtelen sok paraméterezése lehetséges.

Ha a görbe  $y = f(x)$  alakban adott, akkor mindig van paraméteres előállítás:

$$\begin{aligned} x &:= t \\ y &= f(t) \end{aligned}$$

Ha a görbe  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in I$  paraméteres egyenletrendszerrel adott, akkor nem biztos, hogy létezik  $y = f(x)$  előállítás. Pl. az

$$x = 3, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

egyenes nem írható le  $y = f(x)$  alakban.

A következő tétel elégséges feltételt ad arra, hogy a paraméteresen megadott görbének legyen  $y = f(x)$  előállítása is.

Ⓓ

$$x = x(t)$$

$$t_1 < t < t_2$$

$$y = y(t)$$

Ha  $x(t)$  szigorúan monoton, akkor a görbének létezik  $y = f(x)$  előállítása.

Tehát a feltétel teljesülése esetén ez a görbeszakasz megadható az  $y = f(x)$  egyváltozós függvény grafikonjaként is.

Ⓜ

$x(t)$  szigorúan monoton például, ha az intervallumon a deriváltja jeltartó, vagy legfeljebb véges sok pontban lehet az értéke 0, egyébként mindenütt + vagy -.

Ⓑ

A szigorú monotonitás miatt  $x = x(t)$ -nek létezik inverze:  $t = t(x)$

Így a keresett függvény:

$$f(x) = y(t)|_{t=t(x)} = y(t(x))$$

■

Néhány példa paraméteres megadásra:

1.  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $y \geq 0$  paraméteres megadása pl.:

$$x := t, \quad y = \sqrt{R^2 - t^2}, \quad t \in [-R, R]$$

2.  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x \leq 0$  paraméteres megadása pl.:

$$y := t, \quad x = -\sqrt{R^2 - t^2}, \quad t \in [-R, R]$$

3. Origó középpontú teljes kör:  $x^2 + y^2 = R^2$

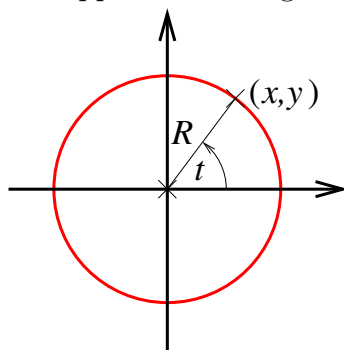
Most nem járunk eredménnyel, ha  $x$ -et vagy  $y$ -t akarjuk paraméterül választani. Helyette az  $x$  tengely + felével bezárt szöget választjuk paraméterül és jelöljük  $t$ -vel (4.27 ábra). Ekkor:

$$\begin{aligned} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

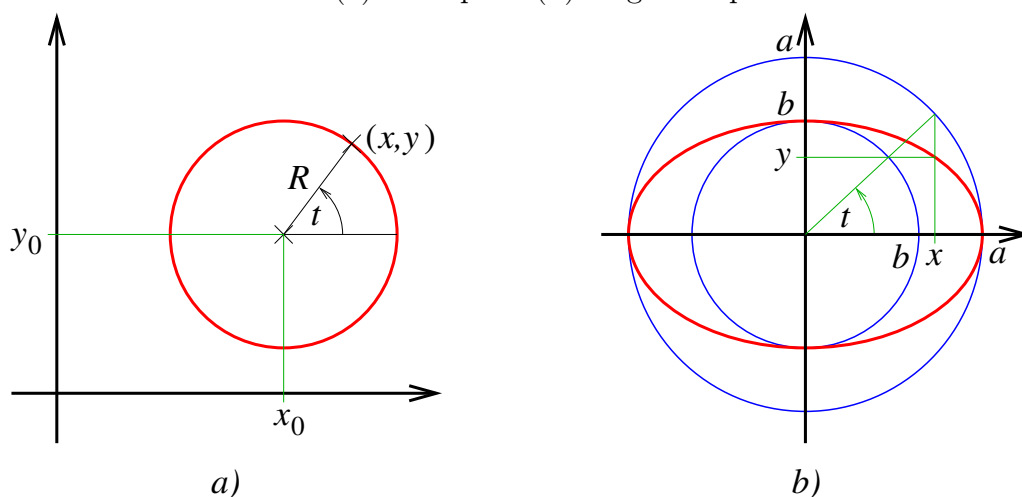
4. Általános helyzetű kör (4.28.a ábra):  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R \cos t \\ y &= y_0 + R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

4.27. ábra. Origó középpontú kör megadása paraméteresen



4.28. ábra. Kör (a) és ellipszis (b) megadása paraméteresen



5. Ellipszis:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Az ellipszis egy pontjának megszerkesztése: megrajzolunk egy  $a$  és egy  $b$  sugarú kört és húzunk egy félegyeneset, melynek az  $x$  tengely pozitív felével bezárt szöge:  $t$  (4.28.b ábra). Ahol ez a félegyenes metszi az  $a$  sugarú kört, abban a pontban az  $y$  tengellyel húzunk párhuzamos egyenest. A félegyenes és a  $b$  sugarú kör metszéspontjában az  $x$  tengellyel párhuzamos egyenest rajzolunk be. Az így kapott két egyenes metszéspontja adja meg az ellipszis  $t$  paraméterű pontját. Ennek megfelelően a paraméteres egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Ⓓ Legyen a  $G$  görbe paraméteres egyenlete:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 < t < t_2$$

$x(t)$  szigorúan monoton,

$x(t), y(t)$  deriválható  $t_0 \in (t_1, t_2)$  -ben és  $\dot{x}(t_0) \neq 0$ .

a) Ekkor az  $f(x) = y(t(x))$  függvény deriválható a megfelelő  $x_0 = x(t_0)$  pontban és

$$f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \Big|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

b) Ha az előző feltételeken túl létezik  $\ddot{x}(t_0), \ddot{y}(t_0)$  is:

$$f''(x_0) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \Big|_{t_0}$$

Ⓔ

a) A feltétel miatt  $x(t)$ -nek létezik a  $t(x)$  inverze és az deriválható. Az összetett függvény és az inverzfüggvény deriválási szabályát felhasználva:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{dy(t(x))}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dt} \Big|_{t_0} \frac{dt}{dx} \Big|_{x_0} = \\ &= \dot{y}(t_0) \frac{1}{\frac{dx}{dt} \Big|_{t_0}} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f''(x_0) &= \frac{d}{dx} f'(x) \Big|_{x_0} = \frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Big|_{x_0} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Big|_{t_0} \frac{dt}{dx} \Big|_{x_0} = \\ &= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \Big|_{t_0} \frac{1}{\frac{dx}{dt} \Big|_{t_0}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \Big|_{t_0} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pl.

$$x(t) = e^{2t} + t^2$$

$$y(t) = \operatorname{ch} 3t + 2t^2$$

a) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a  $t_0 = 0$  paraméterű  $x_0$  pont egy környezetében meghatároz egy  $y = f(x)$  függvényt!

b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek az  $f$  függvénynek az  $x_0$  pontban?

**Megoldás.**

a)  $\dot{x}(t) = 2e^{2t} + 2t$

$\dot{x}(0) = 2 > 0$  és  $x(t)$  folytonos, ezért  $\exists (-\delta, \delta)$  intervallum, ahol  $\dot{x}(t) > 0$   
 $\implies$  itt  $x(t)$  szigorúan monoton nő  
 $\implies \exists$  inverze :  $t = t(x)$  és így  $\exists f(x) = y(t(x))$ .

b)  $\dot{y}(t) = 3 \operatorname{sh} 3t + 4t$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  és  $x_0 = x(0) = 1$

$$f'(1) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = 0 \implies \text{lokális szélsőérték lehet itt.}$$

$$\ddot{x}(t) = 4e^{2t} + 2, \quad \ddot{x}(0) = 6$$

$$\ddot{y}(t) = 9 \operatorname{ch} 3t + 4, \quad \ddot{y}(0) = 13$$

$$f''(1) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \Big|_0 = \frac{13 \cdot 2 - 0}{2^3} = \frac{13}{4}$$

$$f'(1) = 0 \quad \text{és} \quad f''(1) > 0 \implies f \text{-nek lokális minimuma van } x_0 = 1 \text{-ben.}$$

**4.10.1. Görbék megadása síkbeli polárkoordinátákkal**App  
 $\implies$ **Polárkoordináták :  $r, \varphi$** 

A polár koordinátarendszer a pólusból ( $O$ ) és a polártengelyből áll. A sík tetszőleges  $P$  pontja jellemezhető a pont pólustól való távolságával:  $r$  ( $r \geq 0$ ) és az  $OP$  szakasz polártengellyel bezárt szögével:  $\varphi$ . Ha  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , akkor a póluson kívül minden pont egyértelműen jellemzett (4.29 ábra).

Egy síkgörbe egyenletét néha célszerű úgy megadni, hogy megmondjuk, hogy  $r$  hogyan függ a  $\varphi$ -től, tehát megadjuk az  $r = r(\varphi)$  polárkoordinátás egyenletet.

**Kapcsolat a polárkoordináták és a Descartes koordináták között**

A polár koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy a polártengely az  $x$  tengely + felével essen egybe.

Ha  $r, \varphi$  adott, akkor

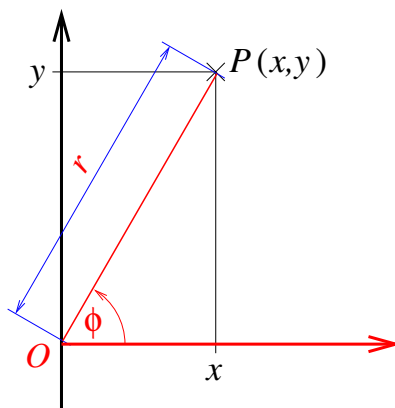
$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Ha  $x, y$  adott, akkor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \varphi \text{ olyan, melyre fennáll, hogy}$$

4.29. ábra. A  $P$  pont síkbeli polárkoordinátái:  $r$  és  $\varphi$



$$\sin \varphi = \frac{y}{r} \quad \text{és} \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}$$

Ha egy görbe  $r = r(\varphi)$  módon adott, akkor

$$\begin{aligned} x &= r(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ y &= r(\varphi) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Így megkaptuk a görbe egy paraméteres egyenletrendszerét.

## 4.11. Feladatok

1. Keresse meg az alábbi határértékeket!

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3 - x}{x^2 + x + 1}$

2. Határozza meg az

$$y = \frac{\pi}{2} + \arcsin 2x$$

értelmezési tartományát, értékészletét és inverzét!

3. A derivált definíciója alapján vizsgálja meg, hogy differenciálható-e a 0-ban az

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sin 2x \cdot \arcsin 3x$$

függvény?

4.  $f(x) = 3\pi - \arccos(1 - x)$

a)  $D_f = ?$  Írja fel az  $x_0 = \frac{1}{2}$  pontbeli érintő egyenesének egyenletét!b) Invertálható-e  $f$ ?  $f^{-1}(x) = ?$   $D_{f^{-1}} = ?$ 

5.  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$   $x_0 = -\frac{1}{2}$  pontbeli érintő egyenese?

6. Ábrázolja az

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

függvényt!

7.  $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$   $g(x) = x^2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

a) Tegye folytonossá a 0 helyen az  $f$  és  $g$  függvényeket!b)  $f'(0) = ?$ ,  $g'(0) = ?$ 

8.  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

$f'(1) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = ?$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 2e^{3x} + 1}{2e^{2x} + 3e^{3x} + 1} = ?$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 2e^{3x} + 1}{2e^{2x} + 3e^{3x} + 1} = ?$

10. Határozza meg az

$$f(x) = 1 + \ln(x^3 + 1)$$

függvény inverzét (ha létezik), az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

11.  $f(x) = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Adja meg a fenti függvény

a) értelmezési tartományát, értékkészletét,

b) inverzét, amennyiben és ahol az létezik.

12.  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right)$

a)  $D_f = ?$ ,  $R_f = ?$ b)  $f^{-1}(x)$ ;  $D_{f^{-1}} = ?$ ;  $R_{f^{-1}} = ?$

13.  $f'(x) = ?$

a)  $f(x) = (\ln x)^x$

d)  $f(x) = (\sin^2 x)^{\sqrt{x+1}}$

b)  $f(x) = (\sin x)^{\cos x^2}$

e)  $f(x) = (\operatorname{arctg} 2x)^x$

c)  $f(x) = \sqrt{x}$

f)  $f(x) = x^x$

14. Írja fel a megadott ponton átmenő  $y = f(x)$  függvény érintő egyenesének egyenletét, ha a függvény kielégíti a megadott implicit kapcsolatot!

a)  $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = -2$

b)  $x \sin y + y \sin x = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_0 = \frac{\pi}{3}; \quad y_0 = \frac{\pi}{4}$

c)  $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2); \quad x_0 = 3; \quad y_0 = 1$

d)  $y^2 \sin \pi y + x \cos \pi x + y = 1; \quad P_0(1, 2)$

e)  $x \ln y + y \ln x = 1; \quad P_0(e, 1)$

f)  $(x^2 + y^2)^3 - 26x^2y^2 = -18; \quad P_0(-1, 1)$

15. Milyen lokális tulajdonsága van az  $x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 0$  pontban az

$$x^2 \sin y + y + \sin x = 1$$

implicit adott függvénynek?

16.  $(x - 2)^3(1 - x) = y^3 + y; \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 0$

Van-e a fenti implicit megadású görbének lokális szélsőértéke, ill. inflexiója az  $(x_0, y_0)$  pontban?

17. Milyen lokális tulajdonságai vannak az

$$x \cos \pi y + y^2 x + y \cos \pi x = 0$$

egyenlet által definiált  $y(x)$  függvénynek az  $x = 0$  pontban?

18. A kétszer folytonosan differenciálható  $y = y(x)$  függvény kielégíti az

$$y^3 - x^5 + x^2 - y^2 = 4$$

implicit egyenletet és  $y(1) = 2$ .

a)  $y'(1) = ? \quad y''(1) = ?$

b) Van-e 1-nek olyan környezete, amelyben a fenti  $y = y(x)$  függvény alulról konvex vagy alulról konkáv? (Vigyázat! Ez nem lokális tulajdonság.)



19.  $f(x) = x - 1 + \operatorname{arctg} x^3$

a)  $f'(x) = ?$  Invertálható-e  $D_f$ -en?

b) Írja fel az  $f^{-1}$  függvény  $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$  pontbeli érintőjének egyenletét!

20. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x = ?$  (Indokoljon!)

b)  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{th} \frac{x-1}{x+2}, & x \neq -2 \\ b, & x = -2 \end{cases}$

Megválasztható-e  $b$  értéke úgy, hogy  $f$  mindenütt folytonos legyen? Hol létezik  $f'(x)$ ?

c) Az inverzfüggvény meghatározása nélkül számítsa ki  $f^{-1}(0)$  értékét!

21. Vizsgáljuk meg, hogy  $0 \leq \varepsilon < 1$  esetén invertálható-e az

$$y = x - \varepsilon \cdot \sin x$$

ún. Kepler-egyenletnek elegendő tevő függvény! Ha invertálható, határozzuk meg az inverz deriváltját is.

Megoldás:

$$y' = 1 - \varepsilon \cos x \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon].$$

Mivel  $\varepsilon \in [0, 1) \implies y' > 0 \implies y$  szigorúan monoton nő  $\implies$  invertálható (mivel  $y$  folytonos is, az inverz is folytonos). Mivel az inverzfüggvényt nem tudjuk expliciten előállítani, csak az implicit függvény deriválása végezhető el. Az inverzfüggvényre vonatkozó implicit egyenlet ( $x \leftrightarrow y$ ):

$$x = y - \varepsilon \cdot \sin y$$

Ezt  $x$  szerint deriválva:

$$1 = y'(x) - \varepsilon (\cos y) y'(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y(x)}$$

22.  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{ha } x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

a) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken a függvény szigorúan monoton!

b)  $\sup_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ?$   $\inf_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ?$

$\max_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ?$   $\min_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ?$

c) Tekintsük az  $(a, f(a))$  és  $(b, f(b))$  pontokon áthaladó húrokat, ahol  $1 < a < b < 2$ . Van-e köztük vízszintes?

d) Legyen  $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$  és  $D_g = (1, \infty)$ .

Határozzuk meg a  $g^{-1}$  inverz függvényt!  $D_{g^{-1}} = ?$

23. Keresse meg az alábbi határértékeket!

- |   |   |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{e^x}$ | k) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$  |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}$   | l) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\operatorname{tg} x}$                                  |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$  | m) $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$                        |
| d) $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x; \quad n \in \mathbb{N}^+$  | n) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$                                    |
| e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}; \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$  | o) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$   |
| f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \cdot \sin x} \right)$   | p) $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$         |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$   | q) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{e^x - 1}{x} \right)$    |
| h) $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$  | r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} 2x}$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$   | s) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$                               |
| j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$   | t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^k}, \quad k \in \mathbb{N}^+$         |

24. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály alkalmazása nem vezet célhoz a határértékek kiszámításánál, és számítsuk ki a keresett határértékeket!

- |  |   |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{\sin 2x + 2x}$             | c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \left( = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x \right)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(x+5)}{\operatorname{ch}(x-1)}$  |

25. Határozza meg  $a$  és  $b$  értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^{x \cdot \sin x}, & \text{ha } x > 0 \\ ax + b, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen  $\mathbb{R}$ -en!

$$26. f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{x-2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

- a) Határozza meg  $b$  értékét úgy, hogy  $f$  folytonos legyen!  
 b) Írja fel az  $x_0 = 1$  pontbeli érintő egyenletét!

$$27. f(x) = \left(\sin \frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{1-x}}$$

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = ?$   
 b)  $f'(x) = ?$ , ha  $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ .

$$28. f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}; \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

- a)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = ?$   
 b)  $f'(x) = ?$

$$29. f(x) = \begin{cases} (x^2)^{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

- a) Határozza meg  $b$  értékét úgy, hogy  $f$  folytonos legyen!  
 b) Bizonyítsa be, hogy ekkor  $f$  differenciálható is a 0 pontban!  
 c) Írja fel a 0 pontbeli érintő egyenes egyenletét!

$$30. f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & \text{ha } x \neq 0 \\ a, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

- a) Válassza meg  $a$  értékét úgy, hogy  $f$  folytonos legyen  $x = 0$ -ban!  
 b)  $f'(x) = ?$

$$31. \text{Legyen } f(x) = |x|3^{-|x|}$$

- a) Létezik-e  $f'(0)$ ?  
 b) Határozza meg  $f$  legnagyobb és legkisebb értékét  $\mathbb{R}$ -en, amennyiben ezek léteznek.  
 c)  $\min_{x \in [1, \infty]} \{f(x)\} = ?$ ,  $\inf_{x \in [1, \infty]} \{f(x)\} = ?$

32. a) Vázolja az  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  függvényt az első derivált vizsgálata alapján. (Konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük.)  
 b) Adja meg az  $x^3 - 6x^2 + 9x = C$  egyenlet különböző valós gyökeinek számát a  $C$  valós szám függvényében!

33. a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = ?$

b) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

34.  $f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x}$

Van-e lineáris aszimptotája  $\pm\infty$ -ben?

35.  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

Van-e lineáris aszimptotája  $-\infty$ -ben?

36.  $x(t) = \frac{\sin t}{t^2 + 1}; \quad y(t) = \sqrt{2 + \cos t} + 2t$

a)  $\dot{x}(t) = ? \quad \dot{y}(t) = ?$

b) Írja fel a görbe  $t_0 = 0$  pontbeli érintőjének egyenletét Descartes koordinátákkal!

37.  $x(t) = e^{2t} + t^2; \quad y(t) = \operatorname{ch} 3t + 2t$

a) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a  $t_0 = 0$  paraméterű  $x_0$  pont egy környezetében meghatároz egy  $y = f(x)$  függvényt!

b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek az  $f$  függvénynek az  $x_0$  pontban?

38. Milyen lokális tulajdonsága van az

$$x = t^2 + 2 \cos \frac{\pi}{2} t, \quad y = \sin \pi t + \frac{\pi}{2} t^2$$

által meghatározott  $y = f(x)$  függvénynek a  $t_0 = 1$  paraméterű  $x_0 = x(t_0)$  pontban?

## 4.12. Néhány kidolgozott feladat

Pl.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \pm \infty\text{-ben van-e lineáris aszimptota?}$$

Megoldás.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{\substack{\downarrow \\ \text{korl.} \\ \infty \rightarrow 0}} + \underbrace{x \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\substack{\sin \frac{1}{x} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow 0}} \right) = 1 = A$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - Ax) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{x^2 \sin \frac{1}{x} - x}_{\infty \cdot 0 - \infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{x^2 \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)}_{\infty \cdot 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 0 = B \end{aligned}$$

$g_a = x$ : aszimptota a  $\pm\infty$ -ben.

**Pl.**  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$  aszimptota  $-\infty$ -ben?

Megoldás.

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 - x + 1} + x \right) \underset{u := -x}{=} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left( \sqrt{u^2 + u + 1} - u \right) \frac{\sqrt{u^2 + u + 1} + u}{\sqrt{u^2 + u + 1} + u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u + 1}{\sqrt{u^2 + u + 1} + u} = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u \left(1 + \frac{1}{u}\right)}{\sqrt{u^2} \sqrt{1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} + u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{u} \frac{1 + \frac{1}{u}}{\sqrt{1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$g_a = -x + \frac{1}{2}$$

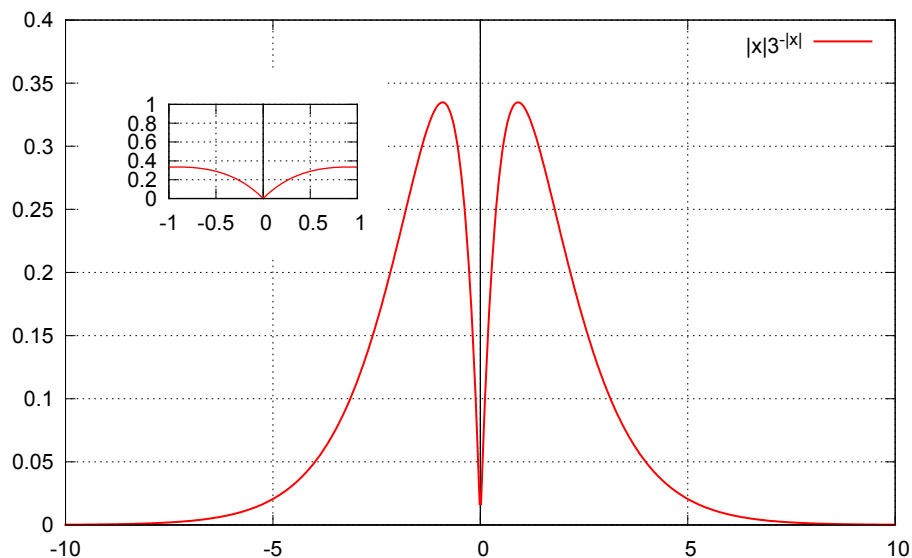
**Pl.** Legyen  $f(x) = |x|3^{-|x|}$ .

1. Létezik-e  $f'(0)$ ?

2. Határozza meg  $f$  legnagyobb és legkisebb értékét  $\mathbb{R}$ -en (amennyiben ezek léteznek)!

3.  $\min_{x \in [1, \infty)} f(x) = ?$        $\inf_{x \in [1, \infty)} f(x) = ?$

4.30. ábra. Az  $f(x) = |x|3^{-|x|}$  függvény grafikonja



**Megoldás.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|3^{-|x|}}{x} = 1$        $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|3^{-|x|}}{x} = -1 \implies x = 0$ -ban nem differenciálható

2.  $f$  páros,  $x \geq 0$  esetén  $f(x) = x 3^{-x}$

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0$$

$$f'(x) = 3^{-x} - \ln 3 \cdot x 3^{-x} = 3^{-x}(1 - \ln 3 \cdot x) = 0 \implies x = \frac{1}{\ln 3}$$

$x$	$\left(0, \frac{1}{\ln 3}\right)$	$\frac{1}{\ln 3}$	$\left(\frac{1}{\ln 3}, \infty\right)$
$f'$	+	0	-
$f$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \quad \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{\ln 3} 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$$

$$3. \frac{1}{\ln 3} < 1 \quad (\text{mert } \ln 3 > 1)$$

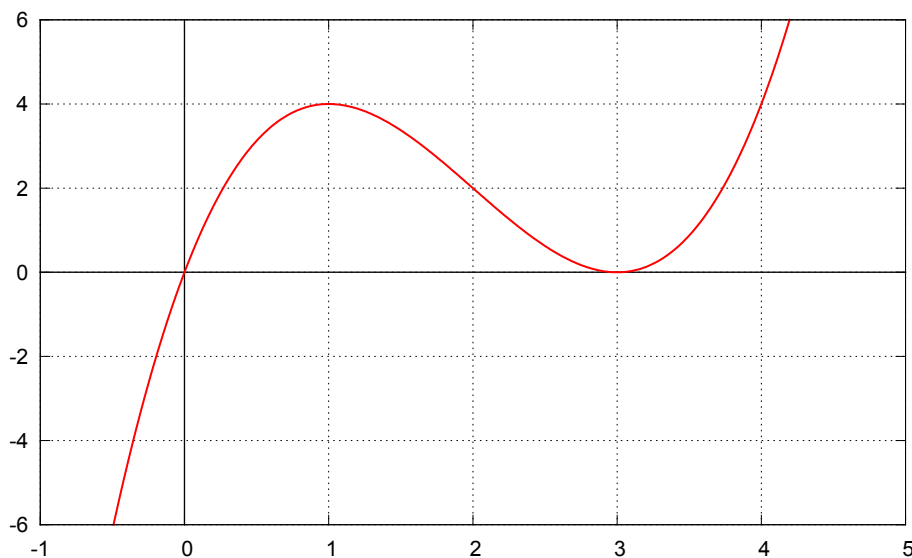
$$\min_{[1, \infty)} f(x) \text{ nem létezik,} \quad \inf_{[1, \infty)} f(x) = 0$$

A függvény grafikonja a 4.30. ábrán látható.

Pl.

- Vázolja az  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  függvényt az első derivált vizsgálata alapján (konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük).
- Adja meg az  $x^3 - 6x^2 + 9x = C$  egyenlet különböző valós gyökeinek számát a  $C$  valós szám függvényeként. Válaszát indokolja.

4.31. ábra. Az  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  függvény grafikonja



**Megoldás.**

- $$f(x) = x(x-3)^2 = 0 \implies x = 0, x = 3$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 3$$

$$f(1) = 4, f(0) = 0$$
- $f(x) = C$  egyenlet megoldásainak a száma:  $R_f = \mathbb{R}$

$\implies \forall c \in \mathbb{R}$ -re van metszéspontja az  $y = f(x)$  és  $y = C$  görbéknek.  
 $c < 0$ : 1 megoldás;  $c = 0$ : 2 megoldás;  $0 < c < 4$ : 3 megoldás;  $c = 4$ : 2 megoldás;  
 $c > 4$ : 1 megoldás.

A függvény grafikonja a 4.31. ábrán látható.

Pl.

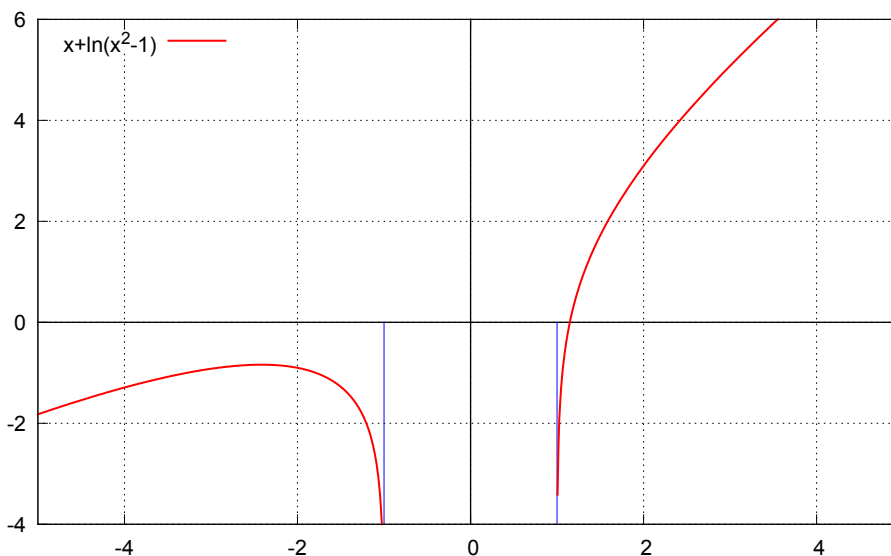
1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = ?$

2. Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

4.32. ábra. Az  $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$  függvény grafikonja



Megoldás.

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1} \cdot 2x}{1} = 0$



$$2. D_f : |x| > 1 \quad \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2 - 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \right) = -\infty$$

$\downarrow$   
 $0$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = 0$$

$$\implies x_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{2} \notin D_f$$

$f$   $(-\infty, -1 - \sqrt{2}]$ -ben és  $(1, \infty)$ -ben monoton nő,  $[-1 - \sqrt{2}, -1)$ -ben monoton csökken.

$f(-1 - \sqrt{2}) < 0$ : itt lok. max.

$$f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \implies f \text{ konkáv}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty \implies \text{csak } x = \pm 1 \text{ aszimptota}$$

A függvény grafikonja a 4.32. ábrán látható.

## 5. fejezet

# Egyváltozós valós függvények integrálása

### 5.1. Primitív függvény, határozatlan integrál

Thom<sub>1</sub>

⇒

App

⇒

App

⇒

App

⇒

Ⓓ  $f$ -nek  $F$  az  $I$  intervallumon primitív függvénye, ha  $\forall x \in I$ -re:

$$F'(x) = f(x).$$

Ⓐ  $f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$F(x) = \frac{\sin^2 x}{2}, \quad G(x) = -\frac{\cos 2x}{4}$$

Az  $I = (-\infty, \infty)$  intervallumon  $F$  és  $G$  primitív függvények, mert

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \text{ sőt } (F(x) + C)' = (G(x) + C)' = f(x)$$

Ⓙ Ha  $f$ -nek  $F$  és  $G$  primitív függvénye  $I$ -n, akkor  $\exists C \in \mathbb{R}$ :

$$F(x) = G(x) + C, \quad x \in I$$

Tehát a primitív függvények csak egy állandóban különböznek.

Ⓑ Már volt. Ez az [integrálszámítás I. alaptétele](#). ■

Ⓓ  $f$  határozatlan integrálja  $I$ -n: a primitív függvények összessége.

$$\int f(x) dx = \{H : H'(x) = f(x) \quad x \in I\text{-re}\} = F(x) + C$$

<sup>1</sup>lásd Thomas 05-ös bemutató 5. fejezet (49-53. oldal).

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$\textcircled{\text{M}}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ 4 + \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 3 + \ln x, & \text{ha } x > 0 \\ -2 + \ln(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \psi'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = H$$

Tehát a  $H$  halmazon mindkettő primitív függvénye  $\frac{1}{x}$ -nek, de nem csak egy konstansban különböznek. Ui.:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha } x > 0 \\ 6, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

De most nem is intervallumon dolgoztunk!

Fontos! Az integrálszámítás alaptétele csak intervallumra igaz!

Ennek ellenére használjuk a következő jelölést:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

Jelentése:  $\ln x + C$ , ha  $I \subset (0, \infty)$  és  $\ln(-x) + C$ , ha  $I \subset (-\infty, 0)$ .

**A határozatlan integrál néhány tulajdonsága :**

(A definíció és a [deriválási szabályok](#) következményei)

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int c f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$$

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + C, \quad \text{ha } \int f(x) \, dx = F(x) + C$$

$$\int f'(x) \cdot f^\alpha(x) \, dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + C$$

## 5.1.1. Példák

$$\int \sin 8x \, dx = -\frac{\cos 8x}{8} + C$$

$$\int \cos \frac{x}{2} \, dx = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int e^{3x} \, dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$\int \frac{7e^x + 8e^{3x}}{e^{2x}} \, dx = \int (7e^{-x} + 8e^x) \, dx = -7e^{-x} + 8e^x + C$$

$$\int (1 + e^x)^2 \, dx = \int (1 + 2e^x + e^{2x}) \, dx = x + 2e^x + \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\int \underbrace{e^x (1 + e^x)^5}_{f' f^5 \text{ alakú}} \, dx = \frac{(1 + e^x)^6}{6} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \underbrace{\frac{-\sin x}{\cos x}}_{f'/f \text{ alakú}} \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx = \int \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{tg} x}_{f' f^1 \text{ alakú}} \, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$$

$$\int \underbrace{\cos x \sin^2 x}_{f' f^2 \text{ alakú}} \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\int x^3 \cos x^4 \, dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \cos x^4 \, dx = \frac{1}{4} \sin x^4 + C$$

$$\int \frac{5}{3x} \, dx = \frac{5}{3} \int \frac{1}{x} \, dx = \frac{5}{3} \ln |x| + C$$

$$\text{Vagy: } \frac{5}{3} \int \frac{3}{3x} \, dx = \frac{5 \ln |3x|}{3} + C \quad (\text{csak egy állandóban különböznek})$$

$$\int \frac{5}{1 + 3x} \, dx = \frac{5}{3} \int \frac{3}{1 + 3x} \, dx = \frac{5}{3} \ln |1 + 3x| + C$$

$$\int \frac{5}{(1+3x)^2} dx = 5 \cdot \frac{1}{3} \int \underbrace{3(1+3x)^{-2}}_{f' f^{-2} \text{ alakú}} dx = \frac{5}{3} \frac{(1+3x)^{-1}}{-1} + C$$

$$\int \frac{5}{1+3x^2} dx = 5 \int \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2} dx = 5 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3}x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{5x}{1+3x^2} dx = 5 \cdot \frac{1}{6} \int \underbrace{\frac{6x}{1+3x^2}}_{f'/f \text{ alakú}} dx = \frac{5}{6} \ln(1+3x^2) + C$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\int x e^{2x^2} dx = \frac{1}{4} \int 4x e^{2x^2} dx = \frac{1}{4} e^{2x^2} + C$$

$$\int e^{x^2} dx \neq \frac{e^{x^2}}{2x} + C : \quad \left( \frac{e^{x^2}}{2x} \right)' = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x - e^{x^2} \cdot 2}{(2x)^2}$$

$f(x) = e^{x^2}$ -nek van primitív függvénye (később tudjuk megindokolni), de nem tudjuk előállítani zárt alakban.

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx = - \int \frac{-2 \sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = - \ln(1+\cos^2 x) + C$$

$$\int \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \operatorname{arctg} \cos x + C$$

$$\int \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}} dx = \int |\sin x| \cos^{-\frac{3}{2}} x dx = \int -\sin x \cos^{-\frac{3}{2}} x dx = \frac{\cos^{-\frac{1}{2}} x}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$I = \left( -\frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

•••

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{\arcsin 2x}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\arcsin 2x}{2} + C = \alpha$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-8x^2}} dx = \frac{-1}{16} \int -16x(2-8x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{16} \frac{(2-8x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \beta$$

$$\boxed{\int \frac{4+3x}{\sqrt{2-8x^2}} dx} = 4 \int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}} dx + 3 \int \frac{x}{\sqrt{2-8x^2}} dx = 4\alpha + 3\beta$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx} = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\arcsin \frac{x+1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \gamma$$

$$\boxed{\int \frac{4x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx} = -2 \int \frac{-2-2x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx =$$

$$= -2 \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{\frac{1}{2}} - 2\gamma + C$$

Foglaljuk össze az előző példák tanulságait!

$$\boxed{\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad \text{típusú integrálok megoldása}}$$

$$f(x) := ax^2 + bx + c$$

Az alábbi átalakítással dolgozunk:

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{f(x)}} dx = k_1 \int f'(x) f^{-1/2}(x) dx + k_2 \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx =$$

$$= k_1 \frac{f^{1/2}(x)}{1/2} + k_2 \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx$$

A megmaradt határozatlan integrál kiszámítása:

A nevezőben teljes négyzetté kiegészítés és esetleges kiemelés után a következő esetek egyikét kapjuk:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{1-(\dots)^2}} dx = k_3 \frac{\arcsin(\dots)}{(\dots)'} + C$$

Vagy:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{1+(\dots)^2}} dx = k_3 \frac{\operatorname{arsh}(\dots)}{(\dots)'} + C$$

Vagy:

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = k_3 \int \frac{1}{\sqrt{(\dots)^2 - 1}} dx = k_3 \frac{\operatorname{arch}(\dots)}{(\dots)'} + C$$

Itt (...) :  $x$ -nek lineáris függvénye, tehát deriváltja konstans.

•••

$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 1} dx$  : A nevezőnek vannak valós gyökei, ilyenkor részlet törtre bontással dolgozunk (lásd később).

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} = \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int 1 \cdot (x+2)^{-2} dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x^2 + 6x + 12} &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{3 + (x+1)^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{9} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \delta \end{aligned}$$

$$\int \frac{6x + 6}{3x^2 + 6x + 12} dx = \ln(3x^2 + 6x + 12) + C = \varepsilon$$

$$\int \frac{6x + 8}{3x^2 + 6x + 12} dx = \int \frac{6x + 6}{3x^2 + 6x + 12} dx + 2 \int \frac{1}{3x^2 + 6x + 12} dx = \varepsilon + 2\delta$$

Összefoglalva az előző példák tanulságait:

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{típusú integrálok megoldása}$$

$$f(x) := ax^2 + bx + c, \quad D := b^2 - 4ac$$

$D \geq 0$  esetén részlet törtre bontással dolgozunk. (Ezt később vesszük.)

$D < 0$  esetén az alábbi átalakítással dolgozunk:

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx = k_1 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + k_2 \int \frac{1}{f(x)} dx = k_1 \ln |f(x)| + k_2 \int \frac{1}{f(x)} dx$$

A megmaradt határozatlan integrál kiszámítása:

A nevezőben teljes négyzetté kiegészítés és esetleges kiemelés után a következő alakot kapjuk:

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = k_3 \int \frac{1}{1 + (\dots)^2} dx = k_3 \frac{\operatorname{arctg}(\dots)}{(\dots)'} + C$$

Gy

Itt (...) :  $x$ -nek lineáris függvénye, így a nevezőbe konstans került.

Thom<sub>2</sub>

App

App

App

## 5.2. Határozott integrál

### 5.2.1. Jelölések, definíciók

A továbbiakban feltesszük, hogy  $a < b$ .

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f$  korlátos  $[a, b]$ -n.

#### Néhány definíció

Ⓓ Osztópontok:  $x_k$ ;  $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$

Ⓓ A  $k$ -adik részintervallum:  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ , hossza:  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ .

Ⓓ  $[a, b]$  egy felosztása:  $F = \{I_k : k = 1, 2, \dots, n\}$  (=  $P$ -vel is jelöljük)

Ⓓ Alsó közelítő összeg (vagy alsó összeg): (a rögzített  $F$  felosztáshoz tartozik)

$$s_F = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad m_k = \inf_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

Ⓓ Felső közelítő összeg (vagy felső összeg): (a rögzített  $F$  felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad M_k = \sup_{x \in I_k} \{f(x)\} \quad (\exists, \text{Dedekind})$$

Ⓓ Az  $F$  felosztás finomsága:  $\Delta F = \max_k \Delta x_k$

Ⓓ Az  $[a, b]$  intervallum  $(F_n)$  felosztásainak sorozatát minden határon túl finomodónak (m.h.t.f.f.s.) nevezzük, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta F_n = 0$$

<sup>2</sup>lásd Thomas 05-ös bemutató 1., 2. és 3. fejezet (3-36. oldal).



Az alsó és felső összeg tulajdonságai:

$$\text{T}_1 \quad s_F \leq S_F$$

ⓑ  $m_k \leq M_k$ -ből következik.

Ⓣ<sub>2</sub>  $F^*$  :  $F$ -ből egy új osztópont elhelyezésével származik. Ekkor

$$s_F \leq s_{F^*} \leq S_{F^*} \leq S_F$$

Tehát a felosztás finomításával az alsó közelítő összeg (a.k.ö.) nem csökkenhet, a felső közelítő összeg (f.k.ö.) nem nőhet.

ⓑ  $s_F \leq s_{F^*}$ -ot bizonyítjuk. Az új osztópont kerüljön  $I_k$ -ba.

$$\begin{aligned} s_{F^*} - s_F &= m'_k(x^* - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x^*) - m_k(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \underbrace{(m'_k - m_k)}_{\geq 0} \underbrace{(x^* - x_{k-1})}_{>0} + \underbrace{(m''_k - m_k)}_{\geq 0} \underbrace{(x_k - x^*)}_{>0} \geq 0 \end{aligned}$$

■

Ⓣ<sub>3</sub>  $s_{F_1} \leq S_{F_2}$ ,  $F_1, F_2$  tetszőleges. Tehát bármely a.k.ö.  $\leq$  bármely f.k.ö.-nél.

ⓑ Az egyesített felosztás segítségével:

$$s_{F_1} \underset{T_2 \text{ miatt}}{\leq} s_{F_1 \cup F_2} \underset{T_1 \text{ miatt}}{\leq} S_{F_1 \cup F_2} \underset{T_2 \text{ miatt}}{\leq} S_{F_2}$$

■

Ⓣ<sub>4</sub>  $\exists \sup \{s_F\} = h$  és  $\inf \{S_F\} = H$

$$h = \int_{\bar{a}}^b f(x) dx \text{ Darboux-féle alsó integrál, } H = \int_a^b f(x) dx \text{ Darboux-féle felső integrál}$$

ⓑ  $\{s_F\}$  felülről korlátos számhalmaz, hiszen bármely f.k.ö. felső korlát.

$$\implies \exists \text{ szuprémuma.}$$

Dedekind t.

$\{S_F\}$ -re hasonlóan bizonyítható.

$$\textcircled{\mathbf{T}}_5 \quad h \leq H$$

$$\textcircled{\mathbf{B}} \quad s_{F_1} \leq S_{F_2} \quad \forall F_1\text{-re} \implies h \leq S_{F_2} \quad \forall F_2\text{-re} \implies h \leq H$$

**A határozott integrál definíciója:**

$\textcircled{\mathbf{D}}$  Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény.

Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon Riemann szerint integrálható, ha  $h = H = I$ . Ezt a közös  $I$  számot az  $f$  függvény  $[a, b]$ -beli határozott integráljának nevezzük és

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f$$

módon jelöljük. ( $f$ : integrálandó függvény vagy integrandusz.)

$$\textcircled{\mathbf{Pl.}} \quad f(x) \equiv c \in \mathbb{R} \quad \int_a^b c dx = ?$$

$$s_F = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a) \quad \forall F\text{-re.}$$

$$S_F = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k = c(b-a) \quad \forall F\text{-re.}$$

$$h = \sup \{s_F\} = c(b-a) = \inf \{S_F\} = H$$

Tehát

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

$$\textcircled{\mathbf{Pl.}} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_1^2 f(x) dx = ?$$

$$s_F = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0 \quad \forall F\text{-re} \implies h = 0$$

$$S_F = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b-a = 2-1 \quad \forall F\text{-re} \implies H = 1 \neq h$$

$$\implies \nexists \int_1^2 f(x) dx \quad (\text{Más intervallumon sem integrálható!})$$

Ⓓ Jelölés:

$R_{[a,b]}$  vagy  $\sum_{[a,b]}$  az  $[a, b]$  intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza.

### 5.3. A Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény.

Segédttétel:

Ⓓ Ha  $(F_n)$  m.h.t.f.f.s., akkor  $s_{F_n}$  és  $S_{F_n}$  konvergensek és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{F_n} = h; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{F_n} = H. \quad (\neg B)$$

Ⓓ

1. Ha  $\int_a^b f(x) dx \exists \implies \forall F_n$  m.h.t.f.f.s.-ra:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{F_n} = \int_a^b f(x) dx$
2. Ha  $\exists F_n$  m.h.t.f.f.s., melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{F_n} = I \implies \exists \int_a^b f(x) dx$  és  $= I$ .

Ⓓ

1. A Segédttétel miatt:  $s_{F_n} \rightarrow h \wedge S_{F_n} \rightarrow H$

De az integrálhatóság miatt:  $h = H = \int_a^b f(x) dx$ .

2. A Segédttétel miatt:  $s_{F_n} \rightarrow h \wedge S_{F_n} \rightarrow H$

A feltétel miatt azonban  $h = H(= I) \implies \exists \int_a^b f(x) dx$  és  $= I$ . ■

Ⓓ Az  $F$  felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg:

$$0 \leq O_F := S_F - s_F = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

Ⓓ

$$\exists \int_a^b f(x) dx \iff \forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists F : O_F < \varepsilon$$

(B)

$$1. \implies \varepsilon \rightarrow \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\text{-höz } \exists F^* \text{ és } F^{**}, \text{ hogy } h - s_{F^*} < \frac{\varepsilon}{2} \wedge S_{F^{**}} - H < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$F := F^* \cup F^{**} \quad (\text{egyesített felosztás})$$

$$\text{Tudjuk: } s_{F^*} \leq s_F \leq S_F \leq S_{F^{**}} \quad \text{Ebből:}$$

$$0 \leq O_F = S_F - s_F \leq S_{F^{**}} - s_{F^*} = \underbrace{S_{F^{**}} - H}_{\geq 0} + \underbrace{h - s_{F^*}}_{\geq 0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$2. \iff$$

Mivel  $s_F \leq h \leq H \leq S_F$  mindig fennáll:

$$0 \leq H - h \leq S_F - s_F = O_F < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\text{-ra} \implies H = h,$$

vagyis  $f$  Riemann-integrálható  $[a, b]$ -n. ■

(D) Az  $f$  függvény  $F$  felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege:

$$\sigma_F = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}),$$

ahol  $\xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$  : reprezentáns pont,  
 $f(\xi_k)$  : reprezentáns függvényérték.

(M<sub>1</sub>) Geometriai tartalom: a függvénygörbe alatti (előjeles) terület közelítő értéke.

(M<sub>2</sub>)  $s_F \leq \sigma_F \leq S_F$  mindig fennáll.

Ugyanis minden részintervallumon teljesül, hogy  $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ . Ebből már következik az állítás.

(T<sub>3</sub>)

1.  $\exists \int_a^b f(x) dx = I \implies \forall F_n$  m.h.t.f.f.s-ra a reprezentáns pontok választásától függetlenül a  $\sigma_{F_n}$  integrálközelítő összeg sorozatra fennáll, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{F_n} = \int_a^b f(x) dx = I$$

$$2. \exists \int_a^b f(x) dx = I \iff \exists F_n \text{ m.h.t.f.f.s., hogy a reprezentáns pontok választásá-} \\ \text{tól függetlenül } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{F_n} = I.$$

ⓑ

$$1. \text{ Nyilvánvaló } T_1\text{-ből, ugyanis } \begin{array}{ccc} s_{F_n} \leq \sigma_{F_n} \leq S_{F_n} & \implies & \sigma_{F_n} \rightarrow I. \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & & I \end{array}$$

2.  $\neg B$  ■

Ⓜ Fontos, hogy a határérték a reprezentáns pontok választásától függetlenül létezzen.

Pl. a Dirichlet-függvényre tetszőleges  $F_n$  m.h.t.f.f.s-ra:

$$\xi_k \text{ rac. esetén: } \sigma_{F_n} = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_n = b - a \rightarrow b - a$$

$$\xi_k \text{ irrac. esetén: } \sigma_{F_n} = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0 \rightarrow 0.$$

Ezért a Dirichlet-függvény egyetlen intervallumon sem integrálható.

## 5.4. Elégséges tételek Riemann-integrálhatóságra

$$\text{Ⓣ}_1 \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ korlátos és monoton} \implies f \in R_{[a,b]}$$

ⓑ  $f$  legyen monoton növény!

$$\Delta x_k := \frac{b-a}{n} \text{ (egyenletes felosztás; ekvidisztáns alappontok)}$$

$$\begin{aligned} O_F &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Tehát  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists F : O_F < \varepsilon$

( $F : I$ -t  $n$  egyenlő részre osztjuk, az  $n > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon}$  feltétel teljesülése)

mellett.)

$$\textcircled{\mathbf{T}_2} \quad f \in C_{[a,b]}^0 \implies f \in R_{[a,b]}$$

$\textcircled{\mathbf{B}}$  Belátjuk, hogy  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists F : O_F < \varepsilon$ .

$\varepsilon > 0$  legyen tetszőleges.  $f \in C_{[a,b]}^0 \implies f$  egyenletesen folytonos  $[a, b]$ -n, vagyis

$$\forall \varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{b-a} > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon^*) :$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon^*, \text{ ha } |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon^*); \quad x_1, x_2 \in [a, b]$$

$F_n$  legyen egy minden határon túl finomodó felosztás sorozat, tehát  $\Delta F_n \xrightarrow[n]{\downarrow} 0$ .

Ezért  $\exists n_0 : \Delta F_{n_0} < \delta(\varepsilon^*) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$ . Erre az  $F_{n_0}$  felosztásra igaz:

$$O_{F_{n_0}} = S_{F_{n_0}} - s_{F_{n_0}} = \sum_{k=1}^{n_0} (M_k - m_k) \Delta x_k =$$

A folytonosság miatt  $f$  felveszi szuprémumát, ill. infimumát ([Weierstrass II. tétele](#))

$$= \sum_{k=1}^{n_0} (f(\xi'_k) - f(\xi''_k)) \Delta x_k <$$

$|\xi'_k - \xi''_k| \leq \Delta x_k < \delta(\varepsilon^*)$ , így az egyenletes folytonosság miatt  $0 \leq f(\xi'_k) - f(\xi''_k) < \varepsilon^*$

$$< \sum_{k=1}^{n_0} \varepsilon^* \Delta x_k = \varepsilon^* \sum_{k=1}^{n_0} \Delta x_k = \varepsilon^* (b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Tehát  $F = F_{n_0}$ .

$$\textcircled{\mathbf{T}_3} \quad f \text{ korlátos és egy pont kivételével folytonos } [a, b]\text{-n} \implies f \in R_{[a,b]}$$

$\textcircled{\mathbf{B}}$  Belátjuk, hogy  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists F : O_F < \varepsilon$ .

Az intervallumot 3 részre osztjuk. ( $f$  az  $x_0$  pontban nem folytonos)

1. Vizsgálat

$$O_{II} = (M_{II} - m_{II}) \cdot 2\delta \leq 2K \cdot 2\delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(x)| \leq K$$

$$\text{Feltétel: } \delta < \frac{\varepsilon}{12K} \quad (\varepsilon, K \text{ adott}). \text{ Ilyen } \delta\text{-t választva } O_{II} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$2. [a, x_0 - \delta]\text{-n } f \text{ folytonos} \implies \exists F^{(1)} : O_I = O_{F^{(1)}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$3. [x_0 + \delta, b]\text{-n } f \text{ folytonos} \implies \exists F^{(2)} : O_{III} = O_{F^{(2)}} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \blacksquare$$

$F$ : a 3 felosztás egyesítése:

$$O_F = O_I + O_{II} + O_{III} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

A következő tételeket bizonyítás nélkül közöljük.

**(T)** Ha  $f$  korlátos és véges sok pont kivételével folytonos  $[a, b]$ -n, akkor integrálható  $[a, b]$ -n.

**(T)** Egy Riemann-integrálható függvény értékét véges sok pontban megváltoztatva a függvény integrálható marad, és az integrál értéke is ugyanaz.

**(T)** Ha  $f \in R_{[-a, a]}$  és

$$f \text{ páratlan:} \quad \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

$$f \text{ páros:} \quad \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

## 5.5. Newton–Leibniz-tétel

Thom3  
 $\implies$

App  
 $\implies$

**(T)** **Newton–Leibniz-tétel**

Ha  $f \in R_{[a, b]}$  és itt létezik primitív függvénye ( $F$ ), azaz  $x \in [a, b]$ -re  $F'(x) = f(x)$ , akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

<sup>3</sup>lásd Thomas 05-ös bevezető 4. fejezet (37-48. oldal).

ⓑ  $F_n$ : m.h.t.f.f.s.

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \\ &+ \dots + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_n) - F(x_{n-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Másrészt az  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$  intervallumon az  $F$  függvényre alkalmazható a [Lagrange-féle középértéktétel](#), miszerint

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = F'(\xi_k) \Delta x_k$$

Ezért

$$\sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sigma_{F_n}^f$$

Vagyis

$$F(b) - F(a) = \sigma_{F_n}^f$$

Mindkét oldal limeszét véve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{F_n}^f$$

A bal oldal határértéke önmaga, hiszen független  $n$ -től, a jobb oldalon  $f$  integrál közelítő összege az integrálhatósági feltétel miatt az integrálhoz tart. Tehát

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

■

↳

$$\text{Pl. } \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Pl. } \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$$



$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{\int_0^{\pi} \sin x \, dx} = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

$\textcircled{\text{M}}$  Mindkét feltétel fontos a Newton–Leibniz-tételben. Az alábbi példák mutatják, hogy egyik sem hagyható el.

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

( $x = 0$ -ban a definícióval kell számolni.)

$$\int_0^1 f(x) \, dx \not\exists, \text{ mert } f \text{ nem korlátos, de } \exists \text{ primitív függvény.}$$

$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \int_0^5 \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6) \, dx \exists$ , mert  $f$  2 pont kivételével folytonos. De  $F \not\exists$ , mert egy deriváltfüggvénynek ( $f$  lenne) nem lehet elsőfajú szakadása.

## 5.6. A Riemann-integrál tulajdonságai

App  
 $\Rightarrow$

$$\textcircled{\text{D}} \quad f \in R_{[a,b]} \quad (b > a) \quad \int_b^a f(x) \, dx := -\int_a^b f(x) \, dx$$

$$\textcircled{\text{D}} \quad \int_a^a f(x) \, dx := 0 \quad (\text{az előzővel összhangban})$$

$\textcircled{\text{T}} \quad \text{Ha } f \in R_{[a,c]} \text{ és } f \in R_{[c,b]} \quad (a < c < b) \implies f \in R_{[a,b]} \text{ és}$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (\neg B)$$

$\textcircled{\text{T}} \quad \text{Ha } f \in R_{[a,b]} \implies f \in R_{[a,c]}, \text{ ha } c \in [a, b] \quad (\neg B)$

**(T)** Ha  $f, g \in R_{[a,b]}$   $\implies f + g \in R_{[a,b]}$  és  $c \cdot f \in R_{[a,b]}$  és

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx ,$$

$$\text{és } \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Tehát  $R_{[a,b]}$  lineáris tér (vektortér).

**(B)** Pl.  $f + g$ -re:

$F_n$ : m.h.t.f.f.s.; reprezentáns pontok:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$\sigma_{F_n}^f = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \rightarrow \int_a^b f(x) dx = I_1$$

$$\sigma_{F_n}^g = \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k \rightarrow \int_a^b g(x) dx = I_2$$

a reprezentáns pontok választásától függetlenül.

$$\implies \sigma_{F_n}^{f+g} = \sum_{k=1}^n (f+g)(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k \rightarrow I_1 + I_2$$

**(D)**  $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés (operátor) funkcionál, ha  
 $H$ : tetszőleges halmaz,  $\mathbb{R}$ : a valós számok halmaza.

**(D)**  $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris funkcionál, ha  
 $H$ : lineáris tér a valós számok teste felett,  $\mathbb{R}$ : a valós számok halmaza.  
 $\Phi$  lineáris operátor, tehát  $\Phi(cx) = c\Phi(x)$ ,  $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$ .

**(Pl.)**  $\Phi(f) := \int_a^b f(x) dx$ ,  $\Phi : R_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris funkcionál.

Ui. igaz:  $\Phi(cf) = c\Phi(f)$  (homogén),  $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$  (additív).

**(T)** Ha  $f \in R_{[a,b]}$  és  $f(x) \geq 0$ , ha  $x \in [a, b]$   $\implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$

**(B)**  $\sigma_F^f \geq 0 \forall F$ -re  $\implies \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \sigma_F^f \geq 0$

$$\textcircled{T} \text{ Ha } f, g \in R_{[a,b]} \text{ és } f(x) \leq g(x) \text{ } x \in [a, b] \text{-ben} \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$\textcircled{B}$   $h(x) := g(x) - f(x) \geq 0$  + előző tételek.

Tehát

$$\begin{aligned} f \geq 0 &: \Phi(f) \geq 0 \\ f \leq g &: \Phi(f) \leq \Phi(g) \quad (\text{monotonitás}) \end{aligned}$$

## 5.7. Az integrálszámítás középértéktétele

App  
→

$$\textcircled{D} \text{ Integrálközep: } \varkappa := \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \quad (b > a)$$

- $\textcircled{T}$
1. Ha  $f \in R_{[a,b]}$ ,  $M = \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$ ,  $m = \inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$ , akkor  $m \leq \varkappa \leq M$ .
  2. Ha  $f \in C^0_{[a,b]}$ , akkor  $\exists \xi \in [a, b]$ , hogy  $f(\xi) = \varkappa$ .

$\textcircled{B}$

1. Mivel  $m \leq f(x) \leq M$ , az [integrál monotonitása](#) miatt:

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

Innen  $(b-a)$ -val való osztással adódik az állítás.

2. [Weierstrass II. tétele](#) miatt  $f$  felveszi  $m$ -et és  $M$ -et, tehát

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b], \text{ hogy } f(\xi_1) = m \text{ és } f(\xi_2) = M$$

$[\xi_1, \xi_2]$ -re (ill.  $[\xi_2, \xi_1]$ -re) alkalmazható a [Bolzano-tétel](#). Mivel  $m \leq \varkappa \leq M$ , a Bolzano-tétel értelmében

$$\exists \xi \in [\xi_1, \xi_2] \text{ (ill. } \xi \in [\xi_2, \xi_1]), \text{ hogy } f(\xi) = \varkappa \quad \blacksquare$$

Ⓓ Az  $f$  függvény  $f^+$  pozitív részét és  $f^-$  negatív részét a következőképpen definiáljuk:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) > 0 \end{cases}$$

Ⓜ Könnyen látható, hogy  $f = f^+ + f^-$  és  $|f| = f^+ - f^-$ .

Ⓓ Ha  $f \in R_{[a,b]}$ , ahol  $a < b$ , akkor

1.  $f^+ \in R_{[a,b]}$ ,  $f^- \in R_{[a,b]}$  és  $|f| \in R_{[a,b]}$

2.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Ⓑ

1. Az oszcillációs összegekre vonatkozó szükséges és elégséges tételből következik, mivel  $O_P^{f^+} \leq O_P^f < \varepsilon$  és  $O_P^{f^-} \leq O_P^f < \varepsilon$ , ezért  $f^+$ , illetve  $f^-$  Riemann-integrálható, valamint különbségük  $|f| \in R_{[a,b]}$ .

2. Mivel

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

ezért az integrál monotonitása miatt

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

amit bizonyítani kellett. ■

Ⓜ Ha nem tesszük fel, hogy  $a < b$ , akkor a 2. tétel állítása

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

alakú lesz.

Ⓓ Az alábbi függvény példa arra, hogy ha  $|f| \in R_{[a,b]}$ , akkor  $f \in R_{[a,b]}$  nem feltétlenül teljesül.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

$|f(x)| \equiv 1$  folytonos  $\implies |f| \in R_{[a,b]}$ , de  $f \notin R_{[a,b]}$

### 5.7.1. Feladatok

1.  $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -3, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

Léteznek-e az alábbi integrálok?

a)  $\int_0^2 f(x) dx$

b)  $\int_0^2 |f(x)| dx$

c)  $\int_0^2 f^2(x) dx$

2. A középértéktétel felhasználásával becsülje meg az

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

integrál értékét!

3. Határozza meg az

$$f(x) = \cos^3 x$$

függvény  $[0, \pi]$  intervallumbeli integrálközepét!

4. Adjon 0-tól különböző alsó, illetve felső becslést az

$$\int_0^1 \frac{1 - x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

integrál értékére!

5. Mutassa meg, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség!

a)  $0 < \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx < \frac{1}{8}$

b)  $0 < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx < 1$

$$c) \frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx < 1 - \frac{1}{e}$$

$$d) \frac{e-1}{2e} < \int_0^1 xe^{-x^3} dx$$

$$e) \left| \int_0^1 \frac{\cos(cx^3)}{x+1} dx \right| \leq \ln 2, \quad c \text{ tetszőleges valós szám}$$

$$6. \int_{-2}^2 \operatorname{sgn} x \cdot x^2 \cdot \cos x dx = ?$$

$$7. \int_0^2 \sqrt{1-2x+x^2} dx = ?$$

$$8. \int_{-2}^3 |x^3 - 2x^2| dx = ?$$

## 5.8. Integrálfüggvény

App  
⇒

Pl.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 3x - 2, & \text{ha } x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = ?, \quad \text{ha } x \in [0, 2]; \quad F'(x) = ?$$

**Megoldás.**

Ha  $x \in [0, 1]$ :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

Ha  $x \in (1, 2]$ :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 t dt + \int_1^x (3t - 2) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + \left( \frac{3t^2}{2} - 2t \right) \Big|_1^x = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1, & \text{ha } x \in (1, 2] \end{cases} \quad F'(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 3x - 2, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

Tehát  $F'(x) = f(x)$ . Látni fogjuk, hogy ez nem véletlen.

Ⓓ  $f \in R_{[a,b]}$ . Az

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^x f(x) dx, \quad x \in [a, b]$$

függvényt  $f$  integrálfüggvényének nevezzük.

Ⓙ **Az integrálszámítás II. alaptétele**

$$f \in R_{[a,b]}; \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

1. Az integrálfüggvény folytonos  $[a, b]$ -ben.

2. Ha még  $f$  folytonos is  $x_0 \in (a, b)$ -ben, akkor  $F$  differenciálható  $x_0$ -ban és

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Ⓚ

1.  $f \in R_{[a,b]} \implies \exists K : |f(x)| \leq K$ . Mi csak belső pontra bizonyítunk. Legyen  $x_0 \in (a, b)$ . Meg kell mutatnunk, hogy

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x K dt \right| = |K(x - x_0)| = K|x - x_0| < \varepsilon, \quad \text{ha } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{K} = \delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

2.  $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ , ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \\
&= \left| \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt}{x - x_0} \right| = \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt}{x - x_0} \right| \leq \frac{\left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right|}{|x - x_0|} := \textcircled{*}
\end{aligned}$$

Mivel  $f$  folytonos  $x_0$ -ban,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ :  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , ha  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ .

(Legyen  $x$  ilyen!) Most  $|t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ , így ezzel a  $\delta(\varepsilon)$ -nal

$$\textcircled{*} < \frac{\left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right|}{|x - x_0|} = \frac{|\varepsilon(x - x_0)|}{|x - x_0|} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Következmény:

1. Ha  $f \in C_{[a,b]}^0$ , akkor  $\forall x \in (a, b)$ -re  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  differenciálható és  $F'(x) = f(x)$ .
2. Folytonos függvénynek mindig létezik primitív függvénye.

### 5.8.1. Példák

**P1.**  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

A függvényt zárt alakban nem tudjuk előállítani, de a következőket tudjuk róla:

$$F(0) = 0$$

$$F'(x) = e^{-x^2} > 0 : F \text{ szig. monoton nő}$$

$$F''(x) = -2xe^{-x^2} : x < 0 : F \text{ alulról konvex, } x > 0 : F \text{ alulról konkáv}$$

$$\text{A függvény páratlan: } F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = \int_0^x e^{-(-u)^2} (-1) du = -F(x)$$



(Helyettesítés hátrébb!)

**Pl.** Keresse meg az alábbi függvények deriváltjait!

$$F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt, \quad x \neq 0$$

$$G(x) = \int_0^{e^x} \sin t^2 dt$$

$$H(x) = \int_{e^x}^{e^x+1} \sin t^2 dt$$

$f(t) = \sin t^2$  folytonossága miatt  $\exists F'(x)$  és  $F'(x) = \sin x^2$ .

$G(x) = F(e^x)$  deriválható, mert deriválható függvények összetétele. A láncszabállyal:

$$G'(x) = F'(e^x) \cdot e^x = (\sin e^{2x}) \cdot e^x$$

$H(x) = F(e^x + 1) - F(e^x)$  szintén a láncszabállyal deriválható:

$$H'(x) = F'(e^x + 1) \cdot e^x - F'(e^x) \cdot e^x = (\sin(e^x + 1)^2) \cdot e^x - (\sin e^{2x}) \cdot e^x$$

**Pl.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t^2 dt}{x^2} = ?$$

$\frac{0}{0}$  alakú és alkalmazható a L'Hospital-szabály:

(A számláló  $\operatorname{arctg} t^2$  folytonossága miatt deriválható)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t^2 dt}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = 0$$

**Pl.**

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{ha } 0 \leq t < 1 \\ t - 1, & \text{ha } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1.  $F''(1) = ?$

2. A  $(0, 2)$  intervallumon hol konvex, ill. konkáv az  $F$  függvény?

$f$  folytonossága miatt  $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ x - 1, & \text{ha } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

$$F''(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x < 2 \end{cases}$$

$F'$  folytonos 1-ben.  $g(x) = 1 - x^2$ ,  $h(x) = x - 1$  mindenütt deriválható. Így

$$F''_-(1) = F''(1 - 0) = -2 \neq 1 = F''_+(1) = F''(1 + 0)$$

Tehát  $\nexists F''(1)$ .

$F$  függvény  $(0, 1)$ -ben konkáv ( $F'' < 0$  itt) és  $(1, 2)$ -ben konvex ( $F'' > 0$  itt).

Gy  
→

## 5.8.2. Feladatok

1. a)  $\frac{d}{dx} \int_a^b \cos(x^3 + 1) dx = ?$

b)  $\frac{d}{da} \int_a^b \cos(x^3 + 1) dx = ?$

c)  $\frac{d}{db} \int_a^b \cos(x^3 + 1) dx = ?$

2.  $F(x) = \int_0^x e^{t^2+1} dt; \quad G(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2+1} dt \quad H(x) = \int_{2x}^{3x} e^{t^2+1} dt$

Határozza meg a deriváltfüggvényeket, ahol azok léteznek!

3.  $f(x) = \int_0^x e^{x^2}(x^2 - 4) dx$

a) Hol monoton  $f$ ? Hol van lokális szélsőértéke?

b) Hol konvex, hol konkáv? Hol van inflexiós pontja?

4.  $f(x) = \int_0^x x^2 \arcsin x dx$

a) Milyen pozitív  $x$ -ekre differenciálható  $f$ ?

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x^2 \arcsin x dx}{x}$

c) Írja fel a függvény  $x_0 = \frac{1}{2}$  pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

5.  $f(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{ha } -1 \leq t \leq 0 \\ -t + 1, & \text{ha } 0 < t \leq 1 \end{cases}$

a) Írja fel a  $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  függvényt! ( $x \in [-1, 1]$ )b) Differenciálható-e a felírt  $G$  függvény  $(-1, 1)$ -ben?

6.  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{8t^7 + 5t^3 + 2t + 6} dt, \quad x \in [0, 3]$

a) Van-e  $f$ -nek lokális szélsőértéke  $(0, 3)$ -ban?b) Hol veszi fel a függvény  $[0, 3]$ -ban a minimumát, illetve maximumát?  
(A minimum, ill. maximum értéke nem kell.)c) Van-e inflexiós pontja  $f$ -nek?

Thom<sub>4</sub>

App

## 5.9. Integrálás helyettesítéssel

**(T)** Legyen  $f \in C^0_{[a,b]}$ ,  $\varphi \in C^1_{[\alpha,\beta]}$  szigorúan monoton és  $\varphi(t) \in [a,b]$ , ha  $t \in [\alpha,\beta]$  ( $[\beta,\alpha]$ ).

1. Ekkor

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$(Vagyis \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)})$$

2. Ha  $\varphi(\alpha) = a$  és  $\varphi(\beta) = b$ : 
$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

**(B)**

1. Az integranduszok folytonossága miatt mindkét határozatlan integrál létezik. Legyen

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad x \in [a, b].$$

Azt kell belátnunk, hogy  $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$  primitív függvénye  $F(\varphi(t))$   $[\alpha, \beta]$ -ban:

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

2.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

és

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \quad \blacksquare$$

## 5.10. Integrálási módszerek

Thom5  
⇒

### 5.10.1. sin és cos szorzata

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Ezen azonosságok felhasználásával ( $\alpha = ax$ ,  $\beta = bx$ ):

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$$

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

$$\begin{aligned} \text{Pl. } \int \sin \pi x \cdot \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(\pi+5)x + \sin(\pi-5)x) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\cos(\pi+5)x}{\pi+5} - \frac{\cos(\pi-5)x}{\pi-5} \right) + C \end{aligned}$$

Feladatok:

1.  $\int \sin \sqrt{2}x \cdot \sin 3x \, dx = ?$

2.  $\int \cos 3x \cdot \cos 8x \, dx = ?$

### 5.10.2. sin és cos páratlan kitevőjű hatványai

$$\sin^{2n+1} x = \sin x \cdot (\sin^2 x)^n = \sin x (1 - \cos^2 x)^n = \dots$$

$$\cos^{2n+1} x = \cos x \cdot (\cos^2 x)^n = \cos x (1 - \sin^2 x)^n = \dots$$

(Az átalakítás után a hatványozás elvégzése szükséges)

$$\begin{aligned} \text{Pl. } \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin x \sin^2 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ &= \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

<sup>4</sup>lásd Thomas 05-ös bemutató 5. fejezet (49-53. oldal).

<sup>5</sup>lásd Thomas 08-as bemutató 1.-5. fejezet (3-24. oldal).

Feladatok:

1.  $\int \cos^3 x \, dx = ?$
2.  $\int \cos^7 x \, dx = ?$

### 5.10.3. sin és cos páros kitevőjű hatványai

$$\sin^{2n} x = (\sin^2 x)^n = \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^n = \dots$$

$$\cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n = \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^n = \dots$$

(Azonos átalakítás a kitevőt csökkenti.)

$$\text{Pl. } \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Feladatok:

1.  $\int \cos^2 x \, dx = ?$
2.  $\int \cos^6 x \, dx = ?$

### 5.10.4. sin és cos hatványainak szorzata

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx = ? \quad n, m \in \mathbb{N}^+$$

1.  $n$  és  $m$  közül legalább az egyik páratlan:

$$\begin{aligned} \text{Pl. } \int \sin^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \sin x \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^4 x \, dx = \\ &= \int \sin x (\cos^4 x - \cos^6 x) \, dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C \end{aligned}$$

Feladat:

$$\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx = ?$$

2.  $n$  és  $m$  is páros:

$$\text{Pl. } \int \underbrace{\sin^2 x}_{=1-\cos^2 x} \cos^4 x \, dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \, dx = \dots$$

### 5.10.5. Parciális integrálás

A szorzatfüggvény

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (u, v \in C_I^1)$$

deriválási szabályából

$$u(x) \cdot v'(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x)$$

és ebből adódik a parciális integrálás módszere:

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx, \quad x \in I$$

Határozott integrálra:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Az alábbi három esetet kell felismerniük:

1.

$$\int \underset{u}{\text{polinom}} \cdot \underset{v'}{\begin{pmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ \text{sh } ax \\ \text{ch } ax \end{pmatrix}} \, dx = ?$$

( $n$ -edrendű polinomnál  $n$ -szer kell parciálisan integrálni.)

$$\begin{aligned} \text{(Pl.) } \int \begin{matrix} x^2 & e^{5x} \\ u = x^2 & v' = e^{5x} \\ u' = 2x & v = \frac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \, dx &= x^2 \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \begin{matrix} x & e^{5x} \\ u = x & v' = e^{5x} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{5}e^{5x} \end{matrix} \, dx = \\ &= x^2 \frac{e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left( \frac{x}{5} e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \, dx \right) = e^{5x} \left( \frac{1}{5} x^2 - \frac{2}{25} x + \frac{2}{125} \right) + C \end{aligned}$$

Feladatok:

a)  $\int (2x + 1) \sin 6x \, dx = ?$

b)  $\int (x^2 + 1) \cos^2 x \, dx = ?$

c)  $\int x \cos x \sin x \, dx = ?$

d)  $\int x^2 \operatorname{sh} 2x \, dx = ?$

2.

$$\int \underset{v'}{\text{polinom}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \ln ax \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \operatorname{arctg} ax \\ \operatorname{arcctg} ax \\ \operatorname{arsh} ax \\ \vdots \\ u \end{array} \right\} dx = ?$$

**Pl.**  $\int \ln x \, dx = \int \underset{v' = 1}{1} \underset{u = \ln x}{\ln x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$   
 $v = x \quad u' = \frac{1}{x}$

Feladatok:

a)  $\int \arcsin x \, dx = ?$

b)  $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = ?$

3.

$$\int \left\{ \begin{array}{l} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \\ \operatorname{sh} ax \\ \operatorname{ch} ax \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{bx} \\ \sin bx \\ \cos bx \\ \operatorname{sh} bx \\ \operatorname{ch} bx \end{array} \right\} dx = ?$$

(Két parciális integrálással oldható meg.)

Bizonyos párosításokat sokkal egyszerűbben is integrálhatunk. Melyek ezek?

De pl. az alábbi integrált csak így tudjuk kiszámolni:

**Pl.**  $\int e^{3x} \sin 2x \, dx = ?$

$$\int \begin{array}{l} e^{3x} \sin 2x \\ u = e^{3x} \quad v' = \sin 2x \\ u' = 3e^{3x} \quad v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} dx = -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int \begin{array}{l} e^{3x} \cos 2x \\ u = e^{3x} \quad v' = \cos 2x \\ u' = 3e^{3x} \quad v = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2}e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x dx \right)$$

Ezt az egyenletet kell megoldani a keresett integrálra:

$$\int e^{3x} \sin 2x dx = \frac{4}{13} \left( -\frac{1}{2}e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x} \sin 2x \right) + C$$

Másik lehetőség: parciálisan integrálunk két különböző kiosztással, majd a kapott egyenletrendszert megoldjuk az eredeti integrálra.

$$X = \int \begin{array}{l} e^{3x} \sin 2x \\ u = e^{3x} \quad v' = \sin 2x \end{array} dx = e^{3x} \left( -\frac{\cos 2x}{2} \right) - \underbrace{\int 3e^{3x} \left( -\frac{\cos 2x}{2} \right) dx}_{\frac{3}{2}Y}$$

$$X = \int \begin{array}{l} e^{3x} \sin 2x \\ v' = e^{3x} \quad u = \sin 2x \end{array} dx = e^{3x} \frac{1}{3} \sin 2x - \underbrace{\int \frac{1}{3} e^{3x} 2 \cos 2x dx}_{-\frac{2}{3}Y}$$

(Ezt az egyenletrendszert kell megoldani  $X$ -re.)

↳

### 5.10.6. Racionális törtfüggvények integrálása

1. lépés: Valódi törtfüggvény-e? Ha nem, osztással átalakítjuk egy racionális egész függvény és egy valódi racionális törtfüggvény összegére.
2. lépés: A valódi törtfüggvény nevezőjében lévő polinomot felírjuk valós együtthatójú első- és másodfokú gyöktényezők szorzataként.
3. lépés: Résztörtekre bontunk.

$$\text{Pl. } \int \frac{2x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 8x + 1}{x^2 + 2x - 8} dx = ? := X$$

Áltört:  $(2x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 8x + 1) : (x^2 + 2x - 8) = 2x^2 - x$ , maradék=1

$$X = \int \left( 2x^2 - x + \frac{1}{x^2 + 2x - 8} \right) dx = \int \left( 2x^2 - x + \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{6} \frac{1}{x+4} \right) dx =$$



$$= 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \ln|x+4| + C$$

Ugyanis  $\frac{1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$

Az együtthatók meghatározása:

1. Behelyettesítéssel (közös nevezőre hozás után a számlálót egyeztetve):

$$1 = A(x+4) + B(x-2)$$

$$x = -4: \quad 1 = B(-6) \quad B = -\frac{1}{6}$$

$$x = 2: \quad 1 = A \cdot 6 \quad A = \frac{1}{6}$$

2. Együttható összehasonlítással:

$$1 = (A+B)x + 4A - 2B$$

$$4A - 2B = 1 \text{ és } A + B = 0 \implies A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}$$

**Pl.**  $\int \frac{x+1}{x^3+x} dx = ? := X$

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A \implies A=1, B=-1, C=1$$

$$X = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$$

Feladatok:

[Gy](#)

$$\int \frac{2x^2}{x^4-1} dx = ?$$

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+2x+2)} dx = ? \left( = \int \left( \frac{\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{x^2+2x+2} \right) dx = \dots \right)$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx = ? \left( = \int \left( 1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \dots \right)$$

## 5.10.7. Integrálás helyettesítéssel

Gy  
→

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$1. \quad \boxed{\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0}$$

Teljes négyzetté kiegészítéssel az alábbi alakok valamelyikére hozzuk:

$$\sqrt{1 - A^2} \quad A := \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{vagy } A := \cos t, \quad t \in [0, \pi])$$

$$\sqrt{B^2 + 1} \quad B := \operatorname{sh} t$$

$$\sqrt{C^2 - 1} \quad C := \operatorname{ch} t$$

A  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ;  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$  azonosságok felhasználásával elvégezhető a gyökvonás.

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{\int \sqrt{1 - x^2} dx = ?} := X$$

$$x = \sin t (= \varphi(t)) \quad \implies \quad t = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t (= \varphi'(t)) \quad (dx = \cos t dt)$$

$$\int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int |\cos t| \cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$

$$= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$X = \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C \right) \Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Határozott integrál esetén:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$$

Pl.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \left[ \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Feladatok:

a)  $\int \sqrt{x^2 + 2x + 2} \, dx = ?$

b)  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-2x^2}} \, dx = ?$

c)  $\int x^3 \sqrt{16-x^2} \, dx = ?$

d)  $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+2}} \, dx = ?$

(Ez elemi úton is integrálható, mert  $\int f' f^\alpha \, dx$  alakú. Oldjuk meg mindkét módon!)

**Racionális törtfüggvény integráljára vezető helyettesítések**

2.  $\int R(e^x) \, dx$

$$e^x := t \longrightarrow x = \ln t \longrightarrow dx = \frac{1}{t} dt$$

Pl.  $\int \frac{1}{1+e^x} \, dx = ? := X$

$$\int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left( \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t} \right) dt = -\ln|1+t| + \ln|t| + C$$

Ugyanis  $\frac{1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$

$$1 = At + B(1+t) \longrightarrow t=0: B=1, t=-1: A=-1$$

Ennek megfelelően a megoldás:

$$X = -\ln(1+e^x) + x + C$$

Feladatok:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ?$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} = ?$$

$$3. \quad \int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx, \quad \sqrt[n]{ax+b} := t$$

$$\text{Pl. } \int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}} dx = ? := X$$

$$\sqrt{x-2} := t \quad \rightarrow \quad x = t^2 + 2 \quad \rightarrow \quad dx = 2t dt$$

$$\int \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 3)t} 2t dt = 2 \int \frac{t^2 + 3 - 4}{t^2 + 3} dt = 2 \int \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} \right) dt =$$

$$= 2t - \frac{8}{3} \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$$

$$X = 2\sqrt{x-2} - \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{3}} + C$$

Feladatok:

$$\text{a) } \int x\sqrt{5x+3} dx = ?$$

$$\text{b) } \int (2x+1)\sqrt{(5x-3)^3} dx = ?$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = ?$$

$$\text{d) } \int \frac{3x^2+4}{\sqrt[3]{6x-4}} dx = ?$$

$$4. \quad \int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}} (i = 1, 2, \dots, n)\right) dx$$

$$t := x^{\frac{1}{q}}, \quad q : q_1, \dots, q_n \text{ legkisebb közös többszöröse}$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} dx = ?} := X \quad q_1 = 2, q_2 = 4, q = 4$$

$$t = x^{\frac{1}{4}} \quad \longrightarrow \quad x = t^4 \quad \Longrightarrow \quad dx = 4t^3 dt$$

$$\int \frac{t^2}{t^3 + 1} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left( t^2 - \frac{1}{3} \frac{3t^2}{t^3 + 1} \right) dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C$$

$$X = \frac{4}{3} \left( \sqrt[4]{x^3} - \ln \left| \sqrt[4]{x^3} + 1 \right| \right) + C$$

Feladatok:

$$\text{a) } \int \frac{1 + x^{\frac{3}{2}}}{3 - x^{\frac{1}{3}}} dx = ?$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx = ?$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{8}}} dx = ?$$

$$5. \quad \boxed{\int R(\sin x, \cos x) dx}$$

$$t := \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \longrightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \longrightarrow \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \left( \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - t^2}{2t} \right)$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sin x (1 + \cos x)} = ?} := X$$

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2}{2t} dt = \int \left( \frac{1}{2t} + \frac{t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{t^2}{4} + C$$

$$X = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{4} + C$$

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx = ?} := X$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt &= \int \frac{t^2+1}{t(1-t)(1+t)} dt = \\ &= \int \left( \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t} \right) dt = \dots \end{aligned}$$

Feladatok:

a)  $\int \frac{1}{\sin x} dx = ?$

b)  $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx = ?$

c)  $\int \frac{1}{2 - \cos x} dx = ?$

## 5.11. Improprius integrál

Thom6

App

### 5.11.1. Definíciók

Ha az intervallum nem korlátos

$\textcircled{\text{D}}$  Ha  $\forall \omega \in (a, \infty)$ -re  $f \in R_{[a, \omega]}$  :

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x) dx$$

Ha létezik a határérték, akkor az improprius integrál konvergens. Ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, akkor az improprius integrál divergens.

$$\textcircled{\text{Pl.}} \quad \boxed{\int_2^\infty \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = ?} := X$$

<sup>6</sup>lásd Thomas 08-as bemutató 8. fejezet (49-50. oldal).

**Megoldás.** Részlet törtre bontással kell dolgoznunk.

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \rightarrow 6 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

$$x = -2: B = -2, \quad x = 1: A = 2$$

$$\begin{aligned} X &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_2^{\omega} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_2^{\omega} \left( \frac{2}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} \right) dx = \\ &= 2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\ln(x - 1) - \ln(x + 2)) \Big|_2^{\omega} = 2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \underbrace{(\ln(\omega - 1) - \ln(\omega + 2))}_{\infty - \infty \text{ alakú}} - (\ln 1 - \\ &\ln 4) = \\ &= 2 \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\ln \frac{\omega - 1}{\omega + 2}}_{\ln \frac{1 - \frac{1}{\omega}}{1 + \frac{1}{\omega}} \rightarrow 0} + \ln 4 \right) = 2 \ln 4 \end{aligned}$$

Ⓓ Ha  $\forall \omega \in (-\infty, b)$ -re  $f \in R_{[\omega, b]}$  :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_{\omega}^b f(x) dx$$

Ha létezik a határérték, akkor az improprius integrál konvergens. Ha a határérték végtelen, vagy nem létezik, akkor az improprius integrál divergens.

Ⓐ  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x - 2) \sqrt{\ln(2 - x)}} dx = ? := X$

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} X &= \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_{\omega}^{-1} \underbrace{\frac{-1}{2 - x} (\ln(2 - x))^{-\frac{1}{2}}}_{f' f^{\alpha} \text{ alakú}} dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \left. \frac{(\ln(2 - x))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_{\omega}^{-1} = \\ &= 2 \lim_{\omega \rightarrow -\infty} (\sqrt{\ln 3} - \sqrt{\ln(2 - \omega)}) = -\infty \quad (\text{divergens}) \end{aligned}$$

## Egy fontos megjegyzés

Ⓓ Az  $\int_a^b f(x) dx$  improprius integrált konvergensenek mondjuk, ha tetszőleges  $c \in (a, b)$  mellett

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{és} \quad \int_c^b f(x) dx$$

mindketten konvergens integrálok, és a fenti integrál divergens, ha az utóbbi két integrál közül akár csak az egyik divergens.

Ⓓ 
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\omega_2 \rightarrow \infty \\ \omega_1 \rightarrow -\infty}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx$$

Ⓜ Az előző definíció miatt  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} f(x) dx$ .

Ui.  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx \neq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\omega}^{\omega} x dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} \right] = 0$ , mert pl.  $\int_0^{\infty} x dx$  divergenciája miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx \text{ is divergens.}$$

## Ha a függvény nem korlátos

Ⓓ Ha  $a$ -ban nem korlátos, de  $f \in R_{[a+\delta, b]}$  ( $a < a + \delta < b$ )

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx \quad \text{vagy} \quad = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_{\alpha}^b f(x) dx$$

Ⓓ Ha  $b$ -ben nem korlátos, de  $f \in R_{[a, b-\delta]}$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx \quad \text{vagy} \quad = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx$$



Ⓓ Ha  $c \in (a, b)$ -ben nem korlátos:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\delta_1} f(x) \, dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow +0} \int_{c+\delta_2}^b f(x) \, dx$$

Ⓔ  $\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = ? := X$

$$X = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{1-\delta} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}}_{f' f^\alpha \text{ alakú}} \, dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left. \frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{1-\delta} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{\delta \rightarrow +0} \left( (\arcsin(1-\delta))^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Ⓔ  $\int_5^7 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} \, dx = ? := X$

$$X = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{5+\delta}^7 (x-5)^{-\frac{2}{3}} \, dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left. \frac{(x-5)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_{5+\delta}^7 = 3 \lim_{\delta \rightarrow +0} \left( \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{\delta} \right) = 3 \sqrt[3]{2}$$

### 5.11.2. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ improprius integráljai

Ⓔ Milyen  $\alpha$ -ra konvergens  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, dx$  ?

**Megoldás.**

Ha  $\alpha = 1$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^\omega \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^\omega = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\ln \omega - \ln 1) = \infty, \quad \text{tehát divergens}$$

Ha  $\alpha \neq 1$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^\omega x^{-\alpha} \, dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^\omega = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right]$$

Konvergens, ha  $1 - \alpha < 0$ , tehát  $\alpha > 1$ .

Divergens, ha  $1 - \alpha > 0$ , tehát  $\alpha < 1$ .

Összefoglalva:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

**Pl.** Milyen  $\alpha$ -ra konvergens  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  ?

**Megoldás.**

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha } \alpha < 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ui.:  $\alpha = 1$ :

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \delta) = \infty, \quad \text{divergens}$$

$\alpha \neq 1$ :

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left[ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]$$

Konvergens, ha  $1 - \alpha > 0$ , tehát  $\alpha < 1$ .

Divergens, ha  $1 - \alpha < 0$ , tehát  $\alpha > 1$ .

**Pl.** Milyen  $\alpha$ -ra konvergens  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  ?

**Megoldás.**

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx}_{\text{konv., ha } \alpha < 1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx}_{\text{konv., ha } \alpha > 1} \quad \text{így divergens } \forall \alpha\text{-ra}$$

## 5.11.3. Az improprius integrálok néhány tulajdonsága

**(T<sub>1</sub>) Cauchy-kritérium**

Az  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  (ill.  $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx$ ) improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \Omega(\varepsilon) \in \mathbb{R}$  szám úgy, hogy  $\forall \omega_1 > \Omega, \omega_2 > \Omega$  (ill.  $\omega_1 < \Omega, \omega_2 < \Omega$ ) esetén:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

**(B) (¬B)** ■

**(D)** Ha  $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$  konvergens, akkor az improprius integrált abszolút konvergensnek mondjuk.

**(D)** Ha  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  konvergens, de  $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$  nem konvergens, akkor az improprius integrált feltételesen konvergensnek mondjuk.

**(T<sub>2</sub>)** Ha  $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$  konvergens, akkor  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  is konvergens, és

$$\left| \int_a^\infty f(x) \, dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| \, dx$$

**(B)**

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) \, dx \right| \leq \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)| \, dx \right| < \varepsilon \quad \omega_1, \omega_2 > \Omega(\varepsilon)$$

Az első egyenlőtlenség a határozott integrálnál [tanultak](#) miatt, a második pedig az abszolút konvergencia és T<sub>1</sub> miatt áll fenn. Tehát  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  is konvergens.

Másrészt:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \text{miatt}$$

$$-\int_a^\omega |f(x)| \, dx \leq \int_a^\omega f(x) \, dx \leq \int_a^\omega |f(x)| \, dx \quad \forall \omega\text{-ra} \quad (\omega > 0)$$

Ekkor a limeszekre is igaz:

$$-\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega |f(x)| \, dx \leq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x) \, dx \leq \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega |f(x)| \, dx$$

tehát

$$\begin{aligned} -\int_a^\infty |f(x)| \, dx &\leq \int_a^\infty f(x) \, dx \leq \int_a^\infty |f(x)| \, dx \\ \implies \left| \int_a^\infty f(x) \, dx \right| &\leq \int_a^\infty |f(x)| \, dx \end{aligned}$$

■

### Majoráns kritérium

**(T<sub>3</sub>)**  $f \in R_{[a,\omega]} \quad \forall \omega \in (a, \infty)\text{-re}$  és  $|f(x)| \leq g(x) \quad x \in [a, \infty)\text{-re}$ .

Ha  $\int_a^\infty g(x) \, dx$  konvergens, akkor  $\int_a^\infty |f(x)| \, dx$  is az (az előző tétel miatt  $\int_a^\infty f(x) \, dx$  is konvergens) és

$$\left( \left| \int_a^\infty f(x) \, dx \right| \leq \right) \int_a^\infty |f(x)| \, dx \leq \int_a^\infty g(x) \, dx$$

**(B)**  $g$ -re igaz a Cauchy-kritérium:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

De  $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$  miatt:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x)| \, dx \right| \leq \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(x) \, dx \right| < \varepsilon$$

tehát  $|f|$ -re is teljesül a Cauchy-kritérium.

Másrészt:

$$\int_a^{\omega} |f(x)| \, dx \leq \int_a^{\omega} g(x) \, dx$$

■

$\forall \omega$ -ra és ezért a limeszekre is teljesül.

### Minoráns kritérium

$$\textcircled{\mathbf{T}_4} \text{ Ha } 0 \leq h(x) \leq f(x) \text{ } x \in [a, \infty)\text{-re és } \int_a^{\infty} h(x) \, dx = \infty \implies \int_a^{\infty} f(x) \, dx = \infty$$

$\textcircled{\mathbf{B}}$  Ha  $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$  konvergens lenne, akkor az előző tétel miatt  $\int_a^{\infty} h(x) \, dx$  is konvergens lenne.  $\nexists$

$\textcircled{\mathbf{M}}$  Hasonló tételek mondhatók ki a  $(-\infty, b]$ , ill.  $[a, b]$  intervallumon definiált improprius integrálokra is.

#### 5.11.4. Feladatok

[Gy](#)  
→

1.  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = ?$

2.  $\int_0^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = ?$

3.  $\int_0^{\infty} e^{-2x} \, dx = ?$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ? \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = ?$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+4)} dx = ?$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = ?$$

$$7. \int_3^{\infty} \frac{8}{(x-2)(x^2+4)} dx = ?$$

$$8. \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = ?$$

$$9. \int_3^7 \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx = ? \quad (t := \sqrt{x-3})$$

$$10. \int_1^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx = ? \quad (t := e^x)$$

$$11. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{2x}+1} dx = ? \quad (t := e^x)$$

12. Konvergens-e az alábbi integrál?

$$a) \int_1^{\infty} \frac{x}{x^4+2x^3+1} dx$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+2x^3+1} dx$$

13. Konvergens-e az

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4+2x^2+2} dx$$

improprius integrál? Ha igen, adjunk becslést az integrál értékére!

## 5.12. Az integrálszámítás alkalmazása

Thom7  
⇒

### 5.12.1. Terület

App  
⇒

A határozott integrál definíciója azonnal adja a következőt.

App  
⇒

Ha egy  $f(x)$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon nem negatív, és integrálható, akkor a grafikonja, az  $x$  tengely, illetve az  $x = a$  és  $x = b$  egyenesek által határolt általánosított trapéz területét a következő képlet adja.

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

Gy  
⇒

**Pl.** Számoljuk ki az egységsugarú félkör területét!

Legyen  $a = -1$ ,  $b = 1$  és  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

Ekkor a terület:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 2t + 1}{2} \, dt = \frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

A helyettesítéses integrál, illetve az inverzfüggvény deriválási szabálya adja a következőt. Ha az  $[\alpha, \beta]$  intervallumon adott  $(x(t), y(t))$  paraméteres görbével dolgozunk, ahol  $y \in C_{[\alpha, \beta]}^0$  nem negatív,  $x \in C_{[\alpha, \beta]}^1$  pedig szigorúan monoton nő, akkor a terület képlete

$$\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) \, dt.$$

**Pl.** Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör területét!

Legyen  $x(t) = -\cos t$ ,  $y(t) = \sin t$  és  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$ .

Ekkor a terület:

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin t \, dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

<sup>7</sup>lásd Thomas 06-os bemutatón.

### 5.12.2. Szektorterület

Ha  $r \in C_{[\alpha, \beta]}^0$  nem negatív, akkor az  $r(\varphi)$  polárkoordinátákkal adott görbe, illetve az  $\alpha$  és a  $\beta$  iránytangensű sugarak által közrezárt szektor területét a következő képlettel számolhatjuk ki.

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \, d\varphi$$

**Pl.** Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör területét!

Ehhez legyen  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$  és  $r(\varphi) = 1$ .

Ekkor a terület:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1^2 \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

**Pl.** Számoljuk ki az egységnégyzet területét!

Ehhez legyen  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  és  $r(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\cos \varphi}, & \text{ha } \varphi \in [0, \pi/4] \\ \frac{1}{\sin \varphi}, & \text{ha } \varphi \in [\pi/4, \pi/2] \end{cases}$ .

A terület:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2(\varphi) \, d\varphi &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi/4} r^2(\varphi) \, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2(\varphi) \, d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \, d\varphi \right) = \frac{1}{2} \left( \operatorname{tg} \varphi \Big|_0^{\pi/4} + -\operatorname{ctg} \varphi \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

### 5.12.3. Forgástest térfogata

Ha  $f \in C_{[a, b]}^0$ , akkor az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát a következő képlet adja.

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$

**Pl.** Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát!

App  
⇒



Legyen  $a = -1$ ,  $b = 1$  és  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

Ekkor a térfogat:

$$\pi \int_{-1}^1 1-x^2 \, dx = \pi \left( x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) = \pi \left( \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{4}{3}\pi$$

Ha az  $[\alpha, \beta]$  intervallumon adott  $(x(t), y(t))$  paraméteres görbével dolgozunk, ahol  $y \in C_{[\alpha, \beta]}^0$ , és  $x \in C_{[\alpha, \beta]}^1$  pedig szigorúan monoton nő, akkor a térfogat képlete

$$\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t) \, dt$$

**Pl.** Számoljuk ki újra az egységsugarú gömb térfogatát!

Legyen  $x(t) = -\cos t$ ,  $y(t) = \sin t$  és  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$ .

Ekkor a térfogat:

$$\pi \int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot \sin t \, dt = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \cdot \sin t \, dt = \pi \left( -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{3}\pi$$

#### 5.12.4. Forgástest felszíne

Ha  $f \in C_{[a, b]}^1$  nem negatív, akkor az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszínét a következő képlet adja.

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

**Pl.** Számoljuk ki az egységsugarú gömb felszínét!

Legyen  $a = -1$ ,  $b = 1$  és  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

Ekkor a felszín:

$$2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \, dx = 2\pi \int_{-1}^1 1 \, dx = 4\pi$$

Ha az  $[\alpha, \beta]$  intervallumon adott  $(x(t), y(t))$  paraméteres görbével dolgozunk, ahol  $x, y \in C_{[\alpha, \beta]}^1$ ,  $y$  nem negatív, akkor a felszín képlete

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

**P1.** Számoljuk ki újra az egységsugarú gömb felszínét!

Legyen  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$  és  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$ .

Ekkor a felszín:

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = 2\pi \int_0^{\pi} \sin t dt = 2\pi (-\cos t)|_0^{\pi} = 4\pi$$

### 5.12.5. Ívhosszúság

Ha  $f \in C^1_{[a,b]}$ , akkor hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

**P1.** Számoljuk ki az egységsugarú félkör kerületét!

Legyen  $a = -1$ ,  $b = 1$  és  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

Ekkor a kerület:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx = \arcsin x|_{-1}^1 = \pi$$

Ha az  $[\alpha, \beta]$  intervallumon adott  $(x(t), y(t))$  paraméteres görbével dolgozunk, ahol  $x, y \in C^1_{[\alpha, \beta]}$ , akkor az ívhossz képlete

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

**P1.** Számoljuk ki újra az egységsugarú félkör kerületét!

Legyen most  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$  és  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ .

Ekkor

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi} 1 dt = \pi$$

# Tárgymutató

- abszolút konvergens
  - improprius integrál 247
  - számsor 54
- Archimédész-axióma 6
- aszimptota 184
- aszimptotikusan egyenlő 82
- átviteli elv 94
- belső pont 110
- Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel 37
- Bolzano Tétel 111
- Cantor-axióma 6, 28
- Cauchy
  - konvergenciakritérium
    - függvényre 92
    - improprius integrálra 247
    - számsorozatra 37
    - számsorra 49
  - sorozat 38
  - szorzat 75
- Darboux-féle integrál (alsó, felső) 213
- Dedekind folytonossági tétel 8
- deriválási szabályok 123
  - inverz függvény 129
  - láncszabály 125
- deriválhatóság
  - baloldali 120
  - intervallumbeli 120
  - jobboldali 119
  - magasabbrendű 126
  - pontbeli 119, 121, 122
- differenciál 122
- differenciálási szabályok 123
  - inverz függvény 129
  - láncszabály 125
- differenciálhatóság
  - baloldali 120
  - intervallumbeli 120
  - jobboldali 119
  - lineáris approximáció 121
  - magasabbrendű 126
  - pontbeli 119, 121, 122
- divergencia
  - számsoré 44
  - számsorozaté 11
  - végtelenhez 11
- érintő 123
- értékkészlet 88
- értelmezési tartomány 88
- $e$  szám 33
- felosztás 212
  - finomsága 212
  - sorozat 212
- folytonosság
  - baloldali 99
  - egyenletes 115
  - intervallumbeli 110
  - jobboldali 99
  - pontbeli 99, 122
- függvény 88
  - exponenciális 134
  - exponenciális hatvány 137
  - hatvány 130
  - hiperbolikus 149
  - inverz 128
  - logaritmikus 135
  - összetett 125
  - trigonometrikus 138

- függvényvizsgálat 184
- görbék
- paraméteres 189
  - polárkoordinátákkal 193
- gyökkritérium 64
- hányados kritérium 61, 62
- harmonikus sor 45
- határ
- alsó 8
  - felső 8
- határérték
- egyértelműség 12
  - függvényé 91, 96, 97
    - baloldali 92
    - jobboldali 92
  - számsorozaté 9
  - végtelen 11
- határpont 110
- Heine tétele 117
- hibabecslés 52, 70, 72
- infimum 8
- inflexió 170, 176
- integrálközép 223
- integrál
- határozatlan 206
  - határozott 214, 221
  - improprius 242–244
  - Riemann 214
- integrálás
- helyettesítéssel 231, 238
  - parciális 234
  - racionális függvényeké 236
- integrálfüggvény 227
- integrálkritérium 68
- integrálszámítás I. alaptétel 165
- integrálszámítás II. alaptétele 227
- invertálhatóság
- függvényé 128
- invertálhatóság (függvényé) 128
- inverz függvény 128
- kompakt halmaz 110
- konkáv függvény 170
- konvergencia
- abszolút 54
  - egyidejű 68, 85
  - elégséges feltétele 27
  - feltételes 54
  - függvényé 91
  - számsoré 43, 44
  - számsorozaté 9
  - szükséges feltétele 12, 50
- konvex függvény 170
- korlátos
- függvény 88
  - halmaz 8
  - számsorozat 9
- környezet 91
- közelítő összeg 216
- alsó 212, 213
  - felső 212, 213
- középértéktételek
- differenciálszámítás
    - Cauchy 164
    - Lagrange 164
    - Rolle 163
  - integrálszámítás 223
- kritérium
- gyök 64
  - hányados 61, 62
  - integrál 68
  - majoráns 57
  - minoráns 58
- külső pont 110
- L’hospital-szabály 166
- láncszabály 125
- legkisebb felső korlát 8
- legnagyobb alsó korlát 8
- Leibniz
- kritérium 51
  - sor 51
- limesz
- függvényé 91, 96, 97

- ~ inferior 39
- számsorozaté 9
- ~ szuperior 39
- lokálisan csökken 174
- lokálisan nő 174
- lokális szélsőérték 162, 175
- m.h.t.f.f.s. 212
- majoráns kritérium 57
  - improprius integrál 248
- minoráns kritérium 58
  - improprius integrál 249
- monoton
  - függvény 88, 128
  - intervallumon 170
  - sorozat 27
- nagyságrend
  - azonos 80
  - kisebb 87
- Newton–Leibniz-tétel 219
- nyílt halmaz 110
- omega  $\Omega$  80
- ordó 80, 86
- oszcillációs összeg 215
- összeg
  - számsoré 43
- osztópont 212
- páratlan függvény 89
- páros függvény 89
- periodikus függvény 89
- polinom 103
- primitív függvény 206
- racionális függvény
  - egész 103
  - integrálása 236
  - tört 105
- rendőrelv 22
  - speciális ~ 23
- részintervallum 212
  - hossza 212
- részletösszeg sorozat 43
- részsorozat
  - konvergens 37
- sor
  - numerikus 43
- sorozat
  - numerikus 8
  - részletösszeg 43
- Stirling-formula 82
- szakadási helyek 99
  - elsőfajú 99
  - másodfajú 99
  - megszüntethető 99
  - véges ugrás 99
- számsor 43
  - $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$  55, 70
  - átrendezés 77
  - átzárójelezés 76
  - divergens 44
  - geometriai 45
  - konvergens 44
  - Leibniz 51
  - mértani 45
- számsorozat 8
  - $(1 + \frac{1}{n})^n$  31
  - $\sqrt[n]{n}$  23
  - $\sqrt[p]{p}$  23
  - $a^n$  23
  - divergens 11
  - konvergens 9
  - monoton 27
  - nagyságrend 80
  - rekurzióval adott 28
- szorzat
  - Cauchy 75
  - természetes 74
- szuprémum 8
- természetes szorzat 74
- teta  $\Theta$  80
- torlódási pont 91
  - sorozaté 39

valós szám 5

Weierstrass tétele

I. 113

II. 113

zárt halmaz 110