



Munkaidő: 90 perc, Max. pontszám: 54

Ponthatárok: 21,5– 2, 29,5– 3, 35– 4, 43– 5 (19– szóbeli lehetőség)

1. FELADAT. (3+3p)

a) Igazoljuk az egy korlátos és egy nullához tartó sorozat szorzatának konvergenciájáról szóló tételt!

b) Határozzuk meg a rendőr-elv segítségével az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n = \sqrt[n]{2n^3 + 3}$$

2. FELADAT. (6p) Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának

ív hosszát az
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

képlettel határozhatjuk meg. Ennek alapján adjuk meg az $f(x) = 3x^{3/2} - 1, x \in [0, 4]$ függvény grafikonjának ívhosszát!

3. FELADAT. (3+3p)

a) Adjuk meg az alábbi határértéket!
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x\sqrt{3}}$$

b) Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt a
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = a$$

határértékre, ahol a határérték "0/0" típusú és $x_0, a \in \mathbb{R}$!

4. FELADAT. (2+4p)

a) Mit értünk izoklinán egy $y'(x) = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet esetén? Adjuk meg az egyenletüket!

b) Adjuk meg az
$$y' = \frac{1 + y^2}{y} x^2$$

differenciálegyenlet általános explicit megoldását!

5. FELADAT. (3+3p)

a) Mondjuk ki és igazoljuk a végtelen mértani sorok konvergenciájára vonatkozó tételt!

b) Konvergens-e az alábbi sor? $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k^2}$

6. FELADAT. (3+3p)

a) Mikor mondjuk, hogy egy $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor egyenletesen tart az $f(x)$ összegfüggvényéhez az I intervallumon?

b) Adjuk meg az $f(x) = 1/(2 + x^2)$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát! Mekkora a hatványsor konvergenciasugara?

7. FELADAT. (2+4p)

a) Adjuk meg általános alakban egy (x_0, y_0) -ban totálisan deriválható $f(x, y)$ függvény érintősíkjának egyenletét!

b) Adjuk meg az alábbi függvény teljes differenciálját és $(1, 1)$ irányú deriváltját az $(1, 2)$ pontban!

$$f(x, y) = x^4 - 3x^2y^2 + 9y$$

8. FELADAT. (2+4p)

a) Adjuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény integrálját az origó középpű 1 sugarú kör x -tengely alatti ($y \leq 0$) részére!

b) Adjuk meg az $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ függvény integrálját az origó középpű 1 sugarú gömb $y \leq 0$ részére!

9. FELADAT. (4+2p) Adjuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$$

2π -periodikus függvény Fourier-sorában a $\sin x$ -es tag együtt-hatóját! Egyenletesen konvergens-e a függvény Fourier-sora?
