A

Analízis szigorlat informatikusoknak

2016.06.16.
BMETE90AX20

Munkaidő: 90 perc, Max. pontszám: 54
Ponthatárok: 21,5– 2, 29,5– 3, 35– 4, 43– 5 (19– szóbeli lehetőség)

1. Feladat. (3+3p)

a) Mit értünk egy komplex szám abszolút értékén és konjugáltján? Milyen kapcsolat van ezek között?

b) Adjuk meg az alábbi egyenlet megoldását a komplex számok halmazán algebrai alakban!

$$z \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathtt{i} \right)^6 = 1$$

---

2. Feladat. (4+2p)

a) Ismertessük a Rolle-tételt, és igazoljuk is!

b) Adjuk meg azokat az x pontokat, ahol az

$$f(x) = x/(x^2+1)^{3/2}$$

függvény grafikonjának érintőjének meredeksége nulla!

---

3. Feladat. (6p)

Adjuk meg az $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét!

(Segítség: Bővítsük a törtet $(1+\sin x)$-szel!)

---

4. Feladat. (3+3p) Tekintsük a $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ karakterisztikus egyenletet!

a) Adjuk meg a fenti karakterisztikus egyenletű, állandó együtthatós, lineáris, homogén differenciálegyenletet és annak azon y megoldását, melyre $y(0) = 1$ és $y'(0) = 0$!

b) Adjuk meg a fenti karakterisztikus egyenletű lineáris rekurziót és az általa generált sorozat 10. tagját, ha $f_0 = 1$ és $f_1 = -2$!

---

5. Feladat. (2+4p)

a) Mondjuk ki a függvénysorokra vonatkozó Weierstrasskritériumot!

b) Mutassuk meg, hogy az alábbi függvénysor összege folytonos függvény az $\mathbb{R}$ halmazon! $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx+\pi)}{k!}$

6. FELADAT. (4+2p) A nevezetes függvények Taylor-sorait felhasználva adjuk meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorait!

a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

b) $g(x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$

7. FELADAT. (3+3p)

a) Mutassuk meg, hogy ha egy többváltozós függvény totálisan deriválható az $\underline{x}_0$ pontban, akkor ott folytonos is!

b) Totálisan deriválható-e az alábbi függvény az origóban?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 2, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8. FELADAT. (2+4p)

a) Adjunk meg elégséges feltételt arra, hogy egy kétváltozós függvénynek egy (x_0, y_0) pontban lokális minimuma legyen!

b) Határozzuk meg az $f(x, y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$ $(x, y > 0)$ függvény lokális szélsőértékeit!

9. FELADAT. (6p) Hengerkoordináták felhasználásával számítsuk ki az $f(x, y, z) = z^2$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 \leq 1$ és $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ egyenlőtlenségek által meghatározott véges tartományra! Készítsünk ábrát az integrálási tartományról!