

Gyakorló feladatok a 6. hétre

Householder és Givens transzformációk. QR-felbontás. Túlhatározott rendszerek.

1. FELADAT. Keressük meg azt a Householder mátrixot, amellyel a $[2, 6, -3]^T$ vektort beszorozva, annak utolsó két eleme nulla lesz! Mi lesz a Householder mátrix a $[-3, 1, -5, 1]^T$ vektor esetén?

2. FELADAT. Legyen \mathbf{A} egy tetszőleges négyzetes mátrix és legyen \mathbf{H} az \mathbf{A} mátrix első oszlopához tartozó Householder mátrix. Ekkor \mathbf{HA} első oszlopában csak a főátló alatti elemek nullák, csakúgy, mint a Gauss-elimináció első lépése után. Mikor egyezhet meg a Gauss-transzformáció \mathbf{L}_1 mátrixa a \mathbf{H} mátrixszal?

3. FELADAT. Megegyezhet-e egymással egy Householder tükrözés és egy Givens forgatás mátrixa?

4. FELADAT. Szorozzuk meg a $[2, 6, -3]^T$ vektort egy ortogonális mátrixszal úgy, hogy az eredményvektor utolsó komponense 0 legyen!

5. FELADAT. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixok Householder QR-felbontásait!

6. FELADAT. Képezzük a fenti \mathbf{A} mátrix QR-felbontását Givens forgatások segítségével! Hány Givens forgatásra van szükség?

7. FELADAT. Oldjuk meg MATLAB-bal az $A \setminus b$ parancs segítségével az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ lineáris egyenletrendszert! Értelmezzük a tapasztaltakat. Oldjunk meg egy tetszőleges egyenletrendszert, melyben a mátrix 3×2 -es, a jobboldali vektor pedig 3 elemű! Értelmezzük a kapott eredményt!

8. FELADAT. Az alábbi táblázat nyolc síkbeli pont koordinátapárjait tartalmazza. Adjuk meg azt a legfeljebb harmadfokú $p(x)$ polinomot, melyre $\sum_{i=1}^8 (p(x_i) - y_i)^2$ minimális lesz! Ábrázoljuk a pontokat és a polinomot is!

x_i	-4	-2	-1	0	1	3	4	6
y_i	-35.1	15.1	15.9	8.9	0.1	0.1	21.1	135

9. FELADAT. Két mennyiséget (x és y) mértünk ill. ezek különbségét és összegét. Az eredmények: $x = a$, $y = b$, $x - y = c$ és $x + y = d$. Oldjuk meg ezt a túlhatározott egyenletrendszert!

10. FELADAT. Oldjuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-k} & 0 \\ 0 & 10^{-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-k} \\ 1 + 10^{-k} \\ 1 - 10^{-k} \end{bmatrix}$$

túlhatározott egyenletrendszert $k = 6, 7, 8$ esetén először papíron számolva, majd az $A \setminus b$ (QR-felbontást használja) és az $(A' * A) \setminus (A' * b)$ utasításokkal (Cholesky-felbontásos megoldás). Hasonlítsuk össze az eredményt!