Feladatok a 11. hét anyagához (beadható: a 12. heti gyakorlatig)

Programírás esetén a Matlab fájlokat kell elküldeni részemre e-mailben. A fájlok ne függvények, hanem szkriptek legyenek, azaz olyan m-fájlok, amik beavatkozás nélkül maguktól lefutnak. A nem programozási feladatokat lapon (kézzel írva vagy nyomtatva) kell beadni.

1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kétdimenziós hővezetési egyenletet a Crank–Nicolson-módszerrel az egységnégyzeten homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett! Először a Matlabbal oldassuk meg minden lépésben az iterációs egyenletrendszert, majd alkalmazzuk a Peaceman–Rachford-sémát a megoldásra! Mérjük meg mindkét iteráció futási idejét, és hasonlítsuk össze a futási időket! (A mátrixok konstruálását nem kell belemérni az időbe, és nem is kell ábrázolni a megoldást.) Legyen $t_{\max} = 0.2$, $n = 50$ (x- ill. y-irányú belső osztópontok száma) és $q = 0.2$!

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u,\ \ (x,y) \in (0,1)\times(0,1) =: \Omega\\
u(0,x,y) &= \sin(\pi x)\sin(\pi y);\\
u(t,x,y) &= 0,\ \ (x,y) \in \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kétdimenziós hullámegyenletet az egységnégyzeten homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett a $[0,2]$ időintervallumon!

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u,\ \ (x,y) \in (0,1)\times(0,1) =: \Omega\\
u(0,x,y) &= e^{-400(x-0.5)^2-400(y-0.5)^2};\\
\frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) &= 0;\\
u(t,x,y) &= 0,\ \ (x,y) \in \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

3. Feladat. Oldjuk meg a Galjorkin-módszer segítségével az alábbi feladatot!

$$
-u'' + u = -x^4 + x^3 + 12x^2 - 6x,\ \ u(0) = u(1) = 0.
$$

Használjuk a gyakorlaton is használt sátor-függvényeket bázisnak (szakaszonként lineáris véges elemek). Fel kell írni a gyenge alakját az egyenletnek, annak segítségével meg kell határozni a merevségi mátrixot és a terhelési vektort (itt lehet a gyakorlaton is szereplő trapézmódszert használni a terhelési vektor elemeinek közelítésére), majd meg kell oldani az egyenletrendszert a c_i szorzókra. Ezek után ábrázoljuk a numerikus megoldást és a pontos megoldást egy koordinátarendszerben (pontos megoldás $u(x) = -x^4 + x^3$)! (A számításokat nem kell beadni papíron, csak a programot, amely meghatározza a megoldást és elkészíti a kért ábrát.)