Feladatok a 12. hét anyagához (beadható: a 13. heti gyakorlatig)

Programírás esetén a Matlab fájlokat kell elküldeni részemre e-mailben. A fájlok ne függvények, hanem szkriptek legyenek, azaz olyan m-fájlok, amik beavatkozás nélkül maguktól lefutnak. A nem programozási feladatokat lapon (kézzel írva vagy nyomtatva) kell beadni.

1. Feladat. (Papíron) Mutassuk meg, hogy ha a $-u'' = f$, $u(0) = u(1) = 0$ egyenletet a Galjorkin-módszerrel oldjuk meg szakaszonként lineáris véges elemeket használva és a terhelési vektort pontosan számítjuk (legyen a megoldás kellően sima), akkor a numerikus megoldás értéke a rácspontokban megegyezik a pontos megoldás értékével! (Segítség: Induljunk ki az egyenletre vonatkozó Galjorkin-ortogonalitás képletéből és alkalmazzuk ezt a $v(x) = G_i(x)$ függvényre, ahol $G_i(x)$ az a függvény, amelyre $G_i(0) = 0$, $G_i(x_i) = x_i(1-x_i)$ (x_i az i-edik osztópont), $G_i(1) = 0$ és a köztes pontokban pedig lineáris! Végezzük el az integrálást, ha kell integráljunk intervallumonként!)

2. Feladat. (Matlab) Tekintsük az egységnégyzeten a szabályos háromszögrácsot $n = 6$ belső ponttal minkét koordináta irányában! (szabályos háromszögrács: négyzetrács, ahol mindegyik négyzetnek be van húzva az az átlója, amelyik a bal felső sarokból megy a jobb alsó sarokba!) Ezen a rácson tekintsünk egy tetszőleges belső ponthoz tartozó sátorfüggvényt (bázisfüggvényt)! Adjuk meg ennek a sátorfüggvénynek a grafikonját! Használjuk ehhez a `trisurf` parancsot! Beadandó az a szkript, amely előállítja a grafikont!

3. Feladat. (Matlab) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a Galjorkin-módszer segítségével szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket használva! Alkalmazzunk szabályos háromszögrácsot, és legyen mindkét koordináta irányában $n = 10$ belső pont! A gyakorlat végén tárgyalt programot kell átírni! Változik a merevségi mátrix, mert nem csak a gradiensek szorzatainak integrálja szerepel benne, hanem a bázisfüggvények szorzatainak integrálja is. Ehhez lásd az előadás 216-os diáját! A pontos megoldás $u(x,t) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Ezt is ábrázoljuk egy külön grafikus ablakban az összehasonlítás kedvéért!

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= (1 + 2\pi^2)\sin(\pi x)\sin(\pi y),\ \ (x,y) \in (0,1) \times (0,1) =: \Omega, \\ u(x,y) &= 0,\ \ (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$