

Feladatok a 13. hét anyagához (beadható: a 14. heti gyakorlatig)

Programírás esetén a Matlab fájlokat kell elküldeni részemre e-mailben. A fájlok ne függvények, hanem szkriptek legyenek, azaz olyan m-fájlok, amik beavatkozás nélkül maguktól lefutnak. A nem programozási feladatokat lapon (kézzel írva vagy nyomtatva) kell beadni.

1. FELADAT. (Papíron) Mutassuk meg, hogy a gyakorlaton szereplő $a : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) + u(0)v(0)$ leképezés kielégíti a Lax–Milgram-tétel feltételeit!

(Útmutatás: A $H^1(0, 1)$ -beli függvények folytonosak, így a fenti hozzárendelés jól definiált. Az a forma folytonosságának megmutatásához az integrálos rész becslését hasonlóan végezzük, mint ahogy azt már csináltuk a homogén Dirichlet-perem esetén. Az $u(0)$ (és $v(0)$) becsléséhez használjuk az alábbi egyenlőséget, ahol ξ azaz az érték, melyre $|u(\xi)| = \min_{x \in [0, 1]} |u(x)|$.

$$u(0) = u(\xi) - \int_0^\xi u'(t) dt$$

miatt

$$|u(0)| \leq |u(\xi)| + \left| \int_0^\xi u'(t) dt \right| \leq \int_0^1 |u(t)| dt + \left| \int_0^\xi u'(t) dt \right|.$$

Ezek után alkalmazzuk a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenséget ill. a számtani és kvadratikus közepek közti egyenlőtlenséget! A koercivitás igazolása egyszerű.)

2. FELADAT. (Matlab) A honlapon szereplő `perem1DFEM.m` program első cellájának átírásával oldjuk meg az alábbi peremértékfeladatot szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket használva! (Most nem ismerjük a pontos megoldást, így csak a numerikus megoldást ábrázoljuk! Legyen $n = 20$!)

$$\begin{aligned} -u'' &= x^3 \sin(\pi x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) &= 1. \end{aligned}$$

3. FELADAT. (Matlab) A gyakorlaton elhangzott útmutatás szerint a honlapon szereplő `perem1DFEM.m` program első cellájának átírásával oldjuk meg az alábbi peremértékfeladatot szakaszonként kvadratikus bázisfüggvényeket használva!

$$\begin{aligned} -u'' &= \frac{\pi^2}{4} \sin(\pi x/2), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 1. \end{aligned}$$

A feladat pontos megoldása $u(x) = \sin(\pi x/2)$. Vizsgáljuk meg a program segítségével az L_2 és H^1 hibákat! Mekkora ezen hibák rendje?