Feladatok a 2. hét anyagához (beadható: a 3. heti gyakorlatig)

Programírás esetén a Matlab fájlokat kell elküldeni részemre e-mailben. A fájlok ne függvények, hanem szkriptek legyenek, azaz olyan m-fájlok, amik beavatkozás nélkül maguktól lefutnak. A nem programozási feladatokat lapon (kézzel írva vagy nyomtatva) kell beadni.

1. Feladat. (Papíron) Gyakorlaton vizsgáltuk a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u_0(0,x) &= u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= 0, \\ u(t,1) &= 0, \end{aligned}$$

feladatra alkalmazott explicit Euler-séma konzisztenciarendjét abban az esetben, ha a bal oldali peremen az x-szerinti első deriváltat az $(u_1^k - u_0^k)/\Delta x$ módon közelítettük. Azt kaptuk, hogy a T_1^{k+1} képlethiba nem tart nullához a rács finomítása esetén. (Ennek ellenére a programunk $\mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$ konvergenciát mutatott.)

Vizsgáljuk meg a konzisztenciarendet abban az esetben, ha a bal oldali deriváltra a másodrendű $(u_1^k - u_{-1}^k)/(2\Delta x)$ közelítést alkalmazzuk! Elég a $j = 0$ indexű pontban kiszámítani a T_0^{k+1} képlethibát! (A többi pontban nyilván $\mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$ lesz a képlethiba. Az eredményt érdemes összevetni azzal, hogy a programunk $\mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$ konvergenciát mutatott. Ez a számolás egyszerűbb lesz, mint amit a gyakorlaton mutattam.)

2. Feladat. (Matlab) Oldjuk meg az alábbi feladatot az explicit Euler-módszer segítségével! A bal oldali Neumann-feltétel közelítésére alkalmazzuk a másodrendű közelítést (lsd. előző feladat). Legyen $n = 59$ belső osztópont a szakaszon, legyen $q = 0.36$, és a feladatot a [0,0.9] időintervallumon szimuláljuk!

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u_0(0,x) &= \sin(\pi x)/\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= 1, \\ u(t,1) &= \sin(15t), \end{aligned}$$

3. Feladat. (Matlab) Egy egységnyi hosszú rúd bal végpontját egy $1°C$-os közegbe helyezzük (nem ugyanaz mintha $1°C$-on tartanánk), míg a jobb végpontot $0°C$-on tartjuk. Kíváncsiak vagyunk a hőmérséklet alakulására a rúdon az idő függvényében. A feladat modellje a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u_0(0,x) &= \cos(\pi x/2), \\ 4(u(t,0)-1) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) &= 0, \\ u(t,1) &= 0 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet lesz. Oldjuk meg a feladatot az explicit Euler-módszer segítségével! A bal oldali Robin-feltétel közelítésére alkalmazzunk másodrendű közelítést! Legyen $n = 59$ belső osztópont a rúdon, legyen $q = 0.36$, és a feladatot a [0,0.9] időintervallumon szimuláljuk!