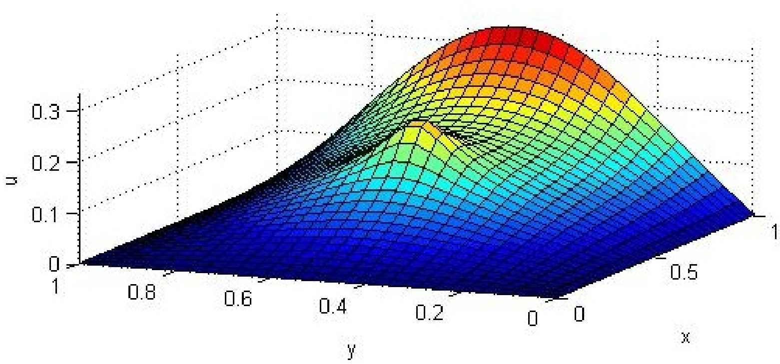
Feladatok a 9. hét anyagához (beadható: a 10. heti gyakorlatig)

Programírás esetén a Matlab fájlokat kell elküldeni részemre e-mailben. A fájlok ne függvények, hanem szkriptek legyenek, azaz olyan m-fájlok, amik beavatkozás nélkül maguktól lefutnak. A nem programozási feladatokat lapon (kézzel írva vagy nyomtatva) kell beadni.

1. Feladat. A gyakorlaton megírt program megfelelő módosításával oldjuk meg az alábbi feladatot! A program ábrázolja a numerikus megoldás grafikonját! A rácson legyen mindkét irányban $n = 30$ belső pont!

$$-\Delta u = 50\exp(-400((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)),\ (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$
$$u(0,y) = u(x,0) = u(x,1) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(1,y) = \sin^2(\pi y).$$

Ilyen lesz a megoldás:



A $-u'' = f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$ egyenletet szeretnénk megoldani a [0,1] intervallumon homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett. Ehhez $n = 2^5 - 1 = 31$ ($p = 5$) belső pontot veszünk fel a [0,1] intervallumon ekvidisztáns módon, és a megoldást ezen pontokban közelítjük (x_i-ben u_i). Ekkor az u_i értékeket az

$$\frac{1}{h^2}\text{tridiag}[-1,2,-1]\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{f}}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk ($f_i = f(x_i)$). Ezen egyenletrendszer megoldására használható a honlapról letöltött `mg1d.m` program, amit kiegészítettünk egy `multigrid` függvénnyel, ami tulajdonképpen a többrácsos megoldási módszert hajtja végre a fenti egyenletrendszerre. A jól működő programnak mutatnia kell az egyenletrendszer pontos megoldásának vektorát (`uerpontos`, $u(x) = \sin(\pi x)$) és a többrácsos módszer iterációs vektorát `ciklusszám=12` lépésen keresztül. Az iterációs vektornak az egyenletrendszer pontos megoldásához kell tartania. Eddig jutottunk el gyakorlaton.

A feladatok:

2. Feladat. Most a program csak a V-ciklust hajtja végre. Írjuk át úgy a programot, hogy lehessen egy `gamma` paraméterrel választani a V- ill. W-ciklusok között (`gamma=1` V-ciklus, `gamma=2` W-ciklus). (Lásd 157. dia.)

3. Feladat. Hajtsuk végre a programmal az alábbi vizsgálatokat! A kód megfelelő módosításával készítsünk olyan ábrákat, melyek a `ciklusszam` ciklusszám függvényében ábrázolják a közelítő megoldás egy-egy ciklus utáni maximum normában vett hibáját

(az `uerpontos`-hoz képest)! Válasszuk `gamma` értékét 1-nek, és legyen a kísérletekben $k_1 = 1, k_2 = 1$ és $k_1 = 2, k_2 = 2$, valamint $p = 5, 7$ és 9! Mitől függ és mitől nem a konvergencia sebessége? Érdemes a `semilogy` parancsot használni az ábrázoláshoz. Ez az y-tengelyen logaritmikus skálát használ.

4. Feladat. (Papíron) A fenti egyenletrendszer megoldása $8n$ flop műveletet igényel módosított Gauss-módszerrel. Határozzuk meg, hogy kb. hány művelet kell ugyanezen egyenletrendszer teljes többrácsos módszerrel történő megoldásához $\gamma = 1$ és $k_1 = k_2 = 1$ esetén! Legyen az eredeti feladat mérete $n = 2^p - 1$ valamilyen p természetes számra, a legdurvább rácsnak pedig legyen csak egy belső pontja! Hasonlítsuk össze ezt a műveletszámot a Gauss-módszeres műveletszámmal! (160-161. dia, de vigyázat ez nem 2D, hanem 1D probléma! A simító iterációt lehet $\overline{\mathbf{u}}_{k+1} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_k + \overline{\mathbf{b}}$ alakúnak venni, ahol $\mathbf{B}$ tridiagonális mátrix, és $\overline{\mathbf{b}}$ adott oszlopvektor.

Szorgalmi feladat 2 pontért:

5. Feladat.

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \sin(\pi x)\sin(\pi y),\ (x,y) \in (0,1)\times(0,1),\\
u(x,0) = u(1,y) &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial n}(x,1) &= 0,\\
\frac{\partial u}{\partial n}(0,y) &= 0.
\end{aligned}
$$

A programnak ilyen ábrát kell produkálnia: