Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat, 2008/09. I. félév, A. csoport

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. FELADAT. Vizsgáljuk meg az $x = -d + \sqrt{d^2 - 4}$ kifejezés kondicionáltságát a d változó függvényében! Milyen d értékek esetén lesz korrekt kitűzésű a feladat? Adjunk meg olyan d értéket, melyre a (relatív) kondíciószám 100-nál nagyobb!

2. FELADAT. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy nemszinguláris mátrix és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy szinguláris mátrix. Igazoljuk, hogy tetszőleges indukált norma esetén $\|\mathbf{A}^{-1}\| \geq 1/\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$. Ezen képlet segítségével adjunk alsó becslést az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix maximumnormabeli kondíciószámára!

3. FELADAT. Oldjuk meg az egyenletrendszert a Gauss-módszerrel teljes főelemkiválasztással és anélkül négyjegyű mantisszát használva! Mekkora a két megoldás eltérése maximumnormában?

$$\begin{aligned} 0.003x_1 + 59.14x_2 &= 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.13x_2 &= 46.78 \end{aligned}$$

4. FELADAT. Tekintsük az alábbi mátrixot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizálható-e ez a mátrix? Válaszunkat indokoljuk! Határozzuk meg a mátrix LU-felbontását!

5. FELADAT. A MATLAB jelöléseit használva legyen a $\mathbf{B}$ mátrix $B = A + A' - diag(diag(A))$, ahol A a negyedik feladat $\mathbf{A}$ mátrixa. Határozzuk meg a $\mathbf{B}$ mátrix Cholesky-felbontását!

6. FELADAT. A negyedik feladat $\mathbf{A}$ mátrixával egy lineáris egyenletrendszert szeretnénk megoldani a Gauss-Seidel módszer relaxálásával. Hogyan válasszuk ω értékét, hogy a leggyorsabban konvergáljon az eljárás? Mekkorának választhatjuk ω értékét egyáltalán, hogy konvergáljon a módszer? ($\mathbf{B}_{GS(\omega)} = (\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}((1-\omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{R})$)

7. FELADAT. A konjugált gradiens módszert alkalmazzuk a tridiag $[-1, 2, -1]\overline{\mathbf{x}} = [1, 0, 1]^T$ egyenletrendszer megoldására. A nullvektort választva kezdővektornak számítsuk ki az $\overline{\mathbf{x}}_2$ vektort, majd számítsuk ki a hozzá tartozó maradékvektort! Mit tapasztalunk? (A konjugált gradiens módszer algoritmusának egy ciklusa: $\alpha_k := \overline{\mathbf{r}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{r}}_{k-1} / (\overline{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{x}}_k := \overline{\mathbf{x}}_{k-1} + \alpha_k \overline{\mathbf{p}}_k$, $\overline{\mathbf{r}}_k := \overline{\mathbf{r}}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A} \overline{\mathbf{p}}_k$, $\beta'_k := \overline{\mathbf{r}}_k^T \overline{\mathbf{r}}_k / (\overline{\mathbf{r}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{r}}_{k-1})$, $\overline{\mathbf{p}}_{k+1} := \overline{\mathbf{r}}_k + \beta'_k \overline{\mathbf{p}}_k$)

8. FELADAT. A laborgyakorlaton használt $grad(A, b, toll, nmax)$ program a gradiens módszert hajtja végre az A mátrixú, b jobboldalú egyenletrendszerre. A program akkor áll le, ha a maradékvektor normája kisebb, mint $toll$, vagy akkor, ha az iterációszám elérte az $nmax$ értéket. Az eredmény az x aktuális iterációs lépés ill. az iteráció $iter$ sorszáma. A program mindig a nullvektorról indítja az iterációt. Hogyan alkalmazzuk a programot, ha az iterációt egy adott y vektortól szeretnénk indítani?

Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat, 2008/09. I. félév, B. csoport

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Vizsgáljuk meg az $x = -d - \sqrt{d^2 - 9}$ kifejezés kondicionáltságát a d változó függvényében! Milyen d értékek esetén lesz korrekt kitűzésű a feladat? Adjunk meg olyan d értéket, melyre a (relatív) kondíciószám 100-nál nagyobb!

2. Feladat. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy nemszinguláris mátrix és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy szinguláris mátrix. Igazoljuk, hogy tetszőleges indukált norma esetén $\|\mathbf{A}^{-1}\| \geq 1/\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$. Ezen képlet segítségével adjunk alsó becslést az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.99 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix maximumnormabeli kondíciószámára!

3. Feladat. Oldjuk meg az egyenletrendszert a Gauss-módszerrel részleges főelemkiválasztással és anélkül négyjegyű mantisszát használva! Mekkora a két megoldás eltérése maximumnormában?

$$\begin{aligned} 0.003x_1 + 59.14x_2 &= 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.13x_2 &= 46.78 \end{aligned}$$

4. Feladat. Tekintsük az alábbi mátrixot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizálható-e ez a mátrix? Válaszunkat indokoljuk! Határozzuk meg a mátrix LU-felbontását!

5. Feladat. A MATLAB jelöléseit használva legyen a $\mathbf{B}$ mátrix $B = 3 * diag(diag(A)) - A - A'$, ahol A a negyedik feladat $\mathbf{A}$ mátrixa. Határozzuk meg a $\mathbf{B}$ mátrix Cholesky-felbontását!

6. Feladat. A negyedik feladat $\mathbf{A}$ mátrixával egy lineáris egyenletrendszert szeretnénk megoldani a Gauss-Seidel módszer relaxálásával. Hogyan válasszuk ω értékét, hogy a leggyorsabban konvergáljon az eljárás? Mekkorának választhatjuk ω-t egyáltalán, hogy konvergáljon a módszer? $(\mathbf{B}_{GS(\omega)} = (\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}((1-\omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{R}))$

7. Feladat. A laborgyakorlaton használt $grad(A, b, toll, nmax)$ program a gradiens módszert hajtja végre az A mátrixú, b jobboldalú egyenletrendszerre. A program akkor áll le, ha a maradékvektor normája kisebb, mint $toll$, vagy akkor, ha az iterációszám elérte az $nmax$ értéket. Az eredmény az x aktuális iterációs lépés ill. az iteráció $iter$ sorszáma. A program mindig a nullvektorról indítja az iterációt. Hogyan alkalmazzuk a programot, ha az iterációt egy adott y vektortól szeretnénk indítani?

8. Feladat. A konjugált gradiens módszert alkalmazzuk a $\text{tridiag}\,[-1, 2, -1]\overline{\mathbf{x}} = [2, 0, 2]^T$ egyenletrendszer megoldására. A nullvektort választva kezdővektornak számítsuk ki az $\overline{\mathbf{x}}_2$ vektort, majd számítsuk ki a hozzá tartozó maradékvektort! Mit tapasztalunk? (A konjugált gradiens módszer algoritmusának egy ciklusa: $\alpha_k := \overline{\mathbf{r}}_{k-1}^T\overline{\mathbf{r}}_{k-1}/(\overline{\mathbf{p}}_k^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{x}}_k := \overline{\mathbf{x}}_{k-1} + \alpha_k\overline{\mathbf{p}}_k$, $\overline{\mathbf{r}}_k := \overline{\mathbf{r}}_{k-1} - \alpha_k\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_k$, $\beta_k' := \overline{\mathbf{r}}_k^T\overline{\mathbf{r}}_k/(\overline{\mathbf{r}}_{k-1}^T\overline{\mathbf{r}}_{k-1})$, $\overline{\mathbf{p}}_{k+1} := \overline{\mathbf{r}}_k + \beta_k'\overline{\mathbf{p}}_k$)