Numerikus módszerek I. (pót ill. javító) zárthelyi dolgozat (2008/09. I.)

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral.

1. Feladat. Két pozitív számot, x és y, elosztunk egymással egy olyan számítógépen, melynek gépi pontossága **u**. Jelölje z a hányados pontos értékét és $\hat{z}$ a számított értéket. Adjunk becslést a $|z-\hat{z}|$ és $|z-\hat{z}|/|z|$ abszolút és relatív hibákra!

2. Feladat. Oldjuk meg az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszert a Gauss-módszer segítségével a lenti adatokkal! Adjuk meg az együtthatómátrix determinánsát is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{bmatrix}$$

3. Feladat. Adjuk meg az előző feladat **A** mátrixának LU-felbontását! Az **A** mátrix inverze a MATLAB jelöléseit használva

$inv(A) = [4, -13/3, 3/2, -1/6; -3, 19/4, -2, 1/4; 4/3, -7/3, 7/6, -1/6; -1/4, 11/24, -1/4, 1/24].$

Számítsuk ki az **A** mátrix maximumnormabeli kondíciószámát!

4. Feladat. Egy **A** mátrix Frobenius normáját az alábbi képlettel számítjuk: $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$. Igazoljuk, hogy $\|\mathbf{A}\|_F^2 = \mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$, ahol a trace(.) jelölés az adott mátrix főátlóbeli elemeinek összegét jelenti (amely megegyezik a sajátértékek összegével is). Igazoljuk továbbá, hogy ha **A** és **B** ortogonálisan hasonlók, akkor Frobenius normájuk megegyezik.

5. Feladat. Határozzuk meg az alábbi **B** mátrix LDL^T és Cholesky-felbontását!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Feladat. Az előző feladat **B** mátrixával szeretnénk megoldani a Jacobi iterációt használva a $\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} = [1,1]^T$ lineáris egyenletrendszert. Végezzünk el két iterációs lépést a nullvektorról indulva és becsüljük meg, hogy hány iterációs lépés lenne szükséges ahhoz, hogy a kapott közelítésnek a maximumnormabeli eltérése a pontos megoldástól 10^{-6}-nál kisebb legyen!

7. Feladat. Oldjuk meg a 6. feladat egyenletrendszerét a konjugált gradiens módszer segítségével a nullvektorról indulva! (A konjugált gradiens módszer algoritmusának egy ciklusa:
$\alpha_k := \overline{\mathbf{r}}_{k-1}^T\overline{\mathbf{r}}_{k-1}/(\overline{\mathbf{p}}_k^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{x}}_k := \overline{\mathbf{x}}_{k-1} + \alpha_k\overline{\mathbf{p}}_k$, $\overline{\mathbf{r}}_k := \overline{\mathbf{r}}_{k-1} - \alpha_k\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_k$, $\beta_k' := \overline{\mathbf{r}}_k^T\overline{\mathbf{r}}_k/(\overline{\mathbf{r}}_{k-1}^T\overline{\mathbf{r}}_{k-1})$, $\overline{\mathbf{p}}_{k+1} := \overline{\mathbf{r}}_k + \beta_k'\overline{\mathbf{p}}_k$)

8. Feladat. Ha egy felső Hessenberg mátrixra alkalmazzuk a Gauss-módszert, akkor figyelembe vehetjük, hogy a főátló "alatt" csak a közvetlenül a főátló alatti elemek különböznek nullától. Mekkora lesz az ilyen mátrixok LU-felbontásának műveletszáma? Mit mondhatunk az **L** és **U** mátrixok szerkezetéről? Ha már a mátrix LU-felbontása elkészült, akkor mennyi műveletbe kerül egy egyenletrendszer megoldása?