Megoldások

1. Feladat. A számábrázolás hibáit vesszük figyelembe. Így

$$\hat{z} = \frac{x(1+\delta_x)}{y(1+\delta_y)}(1+\delta),$$

ahol $|\delta_x|, |\delta_y|, |\delta| \leq \mathtt{u}$. Ekkor az abszolút hiba

$$|\hat{z} - z| = \left|\frac{x(1+\delta_x)}{y(1+\delta_y)}(1+\delta) - \frac{x}{y}\right|$$

$$\leq \frac{x}{y}\left|\frac{(1+\mathtt{u})^2}{1-\mathtt{u}} - 1\right| = \frac{x}{y}\left|(\mathtt{u}^2 + 2\mathtt{u} + 1)(1 + \mathtt{u} + \mathtt{u}^2 + \ldots) - 1\right| \approx \frac{x}{y}3\mathtt{u},$$

ahol $\mathtt{u}$ magasabb hatványait elhagytuk. Az abszolút hiba jelentős lehet, ha x jóval nagyobb y-nál. A relatív hiba $3\mathtt{u}$, ami a gépi pontosság nagyságrendje.

2. Feladat. A megoldás $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. A determináns a létrejövő $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix elemeinek szorzata, azaz 288.

3. Feladat. Az LU-felbontás a következő

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix},$$

ahol az $\mathbf{U}$ mátrix az elimináció során létrejött felső háromszögmátrix, $\mathbf{L}$ pedig egy olyan alsó háromszögmátrix, melynek főátlójában egyesek vannak, a főátló alatti l_{ij} elem pedig azt adja meg, hogy az elimináció során a j-edik oszlop nullázásakor a j-edik sor hányszorosát vontuk ki az i-edik sorból. $\|\mathbf{A}\|_\infty = 354$ és $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 10$ (a sorok abszolút értékben vett összegeinek maximuma). Így a kondíciószám 3540.

4. Feladat.

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})_{ii} = \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{A}^T)_{ik}(\mathbf{A})_{ki} = \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{A})_{ki}(\mathbf{A})_{ki} = \sum_{k=1}^{n}((\mathbf{A})_{ki})^2,$$

azaz az i-edik oszlop négyzetösszege. Azaz a főátlóbeli elemek összege megadja az összes oszlop négyzetösszegét, azaz a Frobenius normát.

Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$, ahol $\mathbf{S}$ ortogonális mátrix. Hasonló mátrixok sajátértékei megegyeznek, így a trace-ük is megegyezik, mert az a sajátértékek összege.

$$\|\mathbf{B}\|_F^2 = \mathrm{trace}(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) = \mathrm{trace}(\mathbf{S}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{S}\mathbf{S}^T)\mathbf{A}\mathbf{S}) = \mathrm{trace}(\mathbf{S}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{S}) = \mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_F^2.$$

(Itt azt is kihasználhattuk volna, hogy a mátrixok ciklikus permutációja során a trace nem változik.)

5. Feladat. A mátrix szimmetrikus, pozitív definit. Cholesky felbontása

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{6} \end{bmatrix}^T.$$

LDL^T felbontása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(Az itteni $\mathbf{D}$ mátrix nem egyezik meg az eredeti mátrix főátlójával, ez az $\mathbf{U}$ főátlója!!!)

6. Feladat. Az iteráció a következő

$$\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_J} \overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Ha a nullvektorról indítjuk az iterációt, akkor $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = [1/2, 1/2]^T$ és $\overline{\mathbf{x}}^{(2)} = [1/4, 1/4]^T$. $\|\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(0)}\|_\infty = 1/2$ és $\|\mathbf{B}_J\|_\infty = 1/2$ (a képletbeli $\mathbf{B}$ mátrix az iterációs mátrixot jelenti, azaz itt most a $\mathbf{B}_J$ mátrixot), akkor a hibabecslés

$$\|\overline{\mathbf{x}}^{(j)} - \overline{\mathbf{x}}^{(0)}\|_\infty \leq \frac{(1/2)^j}{1-1/2}\frac{1}{2} < 10^{-6}.$$

Innét kapjuk, hogy a 20. tag már teljesíti a feltételt.

7. Feladat. Kiinduló adatok: $\overline{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{r}}_0 = \overline{\mathbf{b}} = [1,1]^T$, $\overline{\mathbf{p}}_1 = \overline{\mathbf{b}} = [1,1]^T$. Innét: $\alpha_1 = 1/3$, $\overline{\mathbf{x}}_1 = [1/3, 1/3]^T$, $\overline{\mathbf{r}}_1 = [0,0]^T$. Ez mutatja már, hogy az első lépésben megkaptuk a megoldást.

8. Feladat. A k. oszlop eliminálásánál kell egy osztás (a főátló alatt csak egy nem nulla elem van) az $l_{k+1,k}$ kiszámításához, majd a k. sor $k+1:n$ elemeinek $l_{k+1,k}$-szorosát kivonjuk a $k+1$. sor $k+1:n$ elemeiből. Ez $1 + 2(n-k)$ flop, azaz összesen

$$\sum_{k=1}^{n-1}(1 + 2(n-k)) = n - 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n - 1 + 2\frac{(n-1)n}{2} = n^2 - 1 \; flop.$$

$\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix lesz, $\mathbf{L}$ pedig olyan mátrix, hogy a főátló felett és a szubdiagonális alatt nullák vannak és a főátlóban egyesek.

Ha kész az LU-felbontás, akkor két visszahelyettesítés kell. Egy az $\mathbf{U}$ mátrixszal, ez n^2 flop és egy az $\mathbf{L}$ mátrixszal, ami $2(n-1)$ flop. Tehát összesen $n^2 - 2n - 2$ flopba kerül a megoldás.