Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat, 2009/10. I. félév, A. csoport

Összesen maximum 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges. Az első kettő feladat 5, a többi 6 pontos.

1. Feladat. Az $a = 0.001$ választás mellett $A = 1-1/(1-2a)$ értéke -0.002004008016. Határozzuk meg mi is A értékét egy tizes számrendszerű, hatjegyű mantisszás lebegőpontos számokat használó számítógépen! Javasoljunk numerikus szempontból jobb számolást A-ra és végezzük el úgy is a számolásokat!

2. Feladat. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix és $\mathbf{A}^{(k)}$ az $\mathbf{A}$ mátrix k-adrendű bal felső főminormátrixa ($A(1:k, 1:k)$). Igazoljuk, hogy $\|\mathbf{A}^{(k)}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_2$!

3. Feladat. Az alábbi mátrix egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ szimmetrikus mátrix LU-felbontását tartalmazza úgy, hogy a főátló "alatti" rész az $\mathbf{L}$ mátrix megfelelő főátló alatti részét tartalmazza, a többi elem pedig az $\mathbf{U}$ mátrix megfelelő eleme. Létezik-e az $\mathbf{A}$ mátrixnak Cholesky-felbontása? Ha igen, akkor adjuk meg a $\mathbf{G}$ mátrixot ($\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$)! Adjuk meg azt az $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ vektort, melyre $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [1, 0, 0, 0]^T$!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3/2 & 3/2 & 2 & 3 \\ 1 & 4/3 & 7/3 & 3 \\ 2 & 2 & 9/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

4. Feladat. Az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer $\mathbf{A}$ mátrixának és $\overline{\mathbf{b}}$ jobb oldali vektorának elemei mért mennyiségek, melyek relatív hibája 0.01%, adjunk felső becslést a megoldásvektor relatív hibájára maximumnormában!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0 & -1.7 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & -0.2 & 1.7 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0.53 & 0.38 & -0.32 & 0.07 \\ 0.38 & 1.01 & -0.25 & 0.27 \\ -0.32 & -0.25 & -0.39 & -0.12 \\ 0.07 & 0.27 & -0.12 & 0.65 \end{bmatrix}$$

5. Feladat. Az alábbi egyenletrendszert szeretnénk megoldani a Jacobi-módszer relaxálásával. Hogyan válasszuk meg ω értékét, hogy a leggyorsabban konvergáljon az eljárás? Számítsuk ki, hogy a nullvektorról indulva a leggyorsabb módszerrel mennyit kellene iterálni, hogy a megoldást 10^{-6}-nál jobban megközelítsük maximumnormában! (A relaxált Jacobi-iteráció: $\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = ((1-\omega)\mathbf{E} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R}))\overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \omega\mathbf{D}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. Feladat. Végezzünk el egy lépést a gradiens módszerrel a nullvektorról indulva az előző feladat egyenletrendszeréből származtatott normálegyenletre!

7. Feladat. Adjuk meg Householder-tükrözések segítségével az alábbi mátrix QR-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat, 2009/10. I. félév, B. csoport

Összesen maximum 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges. Az első kettő feladat 5, a többi 6 pontos.

1. Feladat. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix és $\mathbf{A}^{(k)}$ az $\mathbf{A}$ mátrix k-adrendű bal felső főminormátrixa ($A(1:k,1:k)$). Igazoljuk, hogy $\|\mathbf{A}^{(k)}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_2$!

2. Feladat. Az $a = 1000$ választás mellett $A = 1/(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})$ értéke 63.26136064087. Határozzuk meg mi is A értékét egy tizes számrendszerű, hatjegyű mantisszás lebegőpontos számokat használó számítógépen! Javasoljunk numerikus szempontból jobb számolást A-ra és végezzük el úgy is a számolásokat!

3. Feladat. Az alábbi mátrix egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ szimmetrikus mátrix LU-felbontását tartalmazza úgy, hogy a főátló "alatti" rész az $\mathbf{L}$ mátrix megfelelő főátló alatti részét tartalmazza, a többi elem pedig az $\mathbf{U}$ mátrix megfelelő eleme. Létezik-e az $\mathbf{A}$ mátrixnak Cholesky-felbontása? Ha igen, akkor adjuk meg a $\mathbf{G}$ mátrixot ($\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$)! Adjuk meg azt az $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ vektort, melyre $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [0,0,0,1]^T$!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 7/2 \\ 3/2 & 1 & 4 & 3 \\ 3/2 & 7/3 & 3/4 & 1/12 \end{bmatrix}$$

4. Feladat. Az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer $\mathbf{A}$ mátrixának és $\overline{\mathbf{b}}$ jobb oldali vektorának elemei mért mennyiségek, melyek relatív hibája 0.01%, adjunk felső becslést a megoldásvektor relatív hibájára maximumnormában!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0 & -1.7 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & -0.2 & 1.7 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0.26 & 0.18 & -0.16 & 0.04 \\ 0.18 & 0.87 & -0.14 & 0.24 \\ -0.16 & -0.14 & -0.49 & -0.10 \\ 0.04 & 0.24 & -0.10 & 0.65 \end{bmatrix}$$

5. Feladat. Az alábbi egyenletrendszert szeretnénk megoldani a Jacobi-módszer relaxálásával. Hogyan válasszuk meg ω értékét, hogy a leggyorsabban konvergáljon az eljárás? Számítsuk ki, hogy a nulvektorról indulva a leggyorsabb módszerrel mennyit kellene iterálni, hogy a megoldást 10^{-6}-nál jobban megközelítsük maximumnormában! (A relaxált Jacobi-iteráció: $\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = ((1-\omega)\mathbf{E} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R}))\overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \omega\mathbf{D}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Feladat. Végezzünk el egy lépést a gradiens módszerrel a nullvektorról indulva az előző feladat egyenletrendszeréből származtatott normálegyenletre!

7. Feladat. Adjuk meg Householder-tükrözések segítségével az alábbi mátrix QR-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$