Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat, 2009/10. I. félév, A. csoport, MEGOLDÁSOK

1. FELADAT. Az $a = 0.001$ választás mellett $A = 1 - 1/(1-2a)$ értéke -0.002004008016. Határozzuk meg mi is A értékét egy tizes számrendszerű, hatjegyű mantisszás lebegőpontos számokat használó számítógépen! Javasoljunk numerikus szempontból jobb számolást A-ra és végezzük el úgy is a számolásokat!

A kiszámolt érték (mindig hatjegyű mantisszára kerekítve): -2×10^{-3}. A hiba a kiegyszerűsödés miatt lép fel, két közeli szám kivonása miatt. Ez elkerülhető közös nevezőre hozással és egyszerűsítéssel. Így

$$A = \frac{-2a}{1-2a},$$

melynek eredménye -2.00401×10^{-3}.

2. FELADAT. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix és $\mathbf{A}^{(k)}$ az $\mathbf{A}$ mátrix k-adrendű bal felső főminormátrixa ($A(1:k, 1:k)$). Igazoljuk, hogy $\|\mathbf{A}^{(k)}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2$!

Legyen $\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^k$ egy tetszőleges nemnulla vektor. Ekkor

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}\|_2}{\|\overline{\mathbf{x}}\|_2} \geq \sup_{\left[\begin{array}{c}\overline{\mathbf{y}}\\ \mathbf{0}\end{array}\right] \in \mathbb{R}^n} \frac{\left\|\mathbf{A}\left[\begin{array}{c}\overline{\mathbf{y}}\\ \mathbf{0}\end{array}\right]\right\|_2}{\left\|\left[\begin{array}{c}\overline{\mathbf{y}}\\ \mathbf{0}\end{array}\right]\right\|_2} \geq \sup_{\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^k} \frac{\|\mathbf{A}^{(k)}\overline{\mathbf{y}}\|_2}{\|\overline{\mathbf{y}}\|_2} = \|\mathbf{A}^{(k)}\|_2$$

3. FELADAT. Az alábbi mátrix egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ szimmetrikus mátrix LU-felbontását tartalmazza úgy, hogy a főátló "alatti" rész az $\mathbf{L}$ mátrix megfelelő főátló alatti részét tartalmazza, a többi elem pedig az $\mathbf{U}$ mátrix megfelelő eleme. Létezik-e az $\mathbf{A}$ mátrixnak Cholesky-felbontása? Ha igen, akkor adjuk meg a $\mathbf{G}$ mátrixot ($\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$)! Adjuk meg azt az $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ vektort, melyre $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [1,0,0,0]^T$!

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3/2 & 3/2 & 2 & 3 \\ 1 & 4/3 & 7/3 & 3 \\ 2 & 2 & 9/7 & 1/7 \end{array}\right]$$

Olvassuk ki a mátrixból az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixokat. Mivel $\mathbf{U}$ főtlójának minden eleme pozitív, így az eredeti mátrix minden főminorja pozitív, azaz a mátrix szimmetrikus (ez a szövegből derül ki) és pozitív definit. Legyen $\mathbf{D}$ az $\mathbf{U}$ mátrix főátlómátrixa. Ekkor $\mathbf{G} = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}}$ ($\sqrt{\mathbf{D}}$-t úgy kapjuk, hogy $\mathbf{D}$ minden eleméből gyököt vonunk), azaz

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 3/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2/3\sqrt{6} & 1/3\sqrt{21} & 0 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{6} & 3/7\sqrt{21} & 1/7\sqrt{7} \end{array}\right].$$

Az adott egyenletrendszert úgy oldhatjuk meg a leggyorsabban, ha először megoldjuk az $\mathbf{L}\overline{\mathbf{y}} = [1,0,0,0]^T$ egyenletrendszert, amely egyszerű visszahelyettesítéssel megoldható. $\overline{\mathbf{y}} = [3, -3/2, 1, -2/7]$ adódik, majd pedig az $\mathbf{U}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$ egyenlet megoldásával (szintén egyszerű visszahelyettesítéssel) adódik az $\overline{\mathbf{x}} = [3, -1, 3, -2]^T$ megoldás.

4. Feladat. Az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer $\mathbf{A}$ mátrixának és $\overline{\mathbf{b}}$ jobb oldali vektorának elemei mért mennyiségek, melyek relatív hibája 0.01%, adjunk felső becslést a megoldásvektor relatív hibájára maximumnormában!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0 & -1.7 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & -0.2 & 1.7 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0.53 & 0.38 & -0.32 & 0.07 \\ 0.38 & 1.01 & -0.25 & 0.27 \\ -0.32 & -0.25 & -0.39 & -0.12 \\ 0.07 & 0.27 & -0.12 & 0.65 \end{bmatrix}$$

Mivel $|\delta a_{ij}/a_{ij}| \leq 0.01\% = 10^{-4}$, azaz $|\delta a_{ij}| \leq 10^{-4}|a_{ij}|$, ezért $\|\delta\mathbf{A}\|_\infty/\|\mathbf{A}\|_\infty \leq 10^{-4}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\|\delta\overline{\mathbf{b}}\|_\infty/\|\overline{\mathbf{b}}\|_\infty \leq 10^{-4}$. A mátrixokról leolvasható, hogy $\|\mathbf{A}\|_\infty = 4$ és $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 1.9$. Ebből a megoldás relatív hibájára levezetett képlet alapján kapjuk, hogy

$$\|\delta\overline{\mathbf{x}}\|_\infty/\|\overline{\mathbf{x}}\|_\infty \leq \frac{4 \cdot 1.91}{1 - 4 \cdot 1.91 \cdot 10^{-4}}(10^{-4} + 10^{-4}) = 0.00153.$$

5. Feladat. Az alábbi egyenletrendszert szeretnénk megoldani a Jacobi-módszer relaxálásával. Hogyan válasszuk meg ω értékét, hogy a leggyorsabban konvergáljon az eljárás? Számítsuk ki, hogy a nullvektorról indulva a leggyorsabb módszerrel mennyit kellene iterálni, hogy a megoldást 10^{-6}-nál jobban megközelítsük maximumnormában! (A relaxált Jacobi-iteráció: $\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = ((1-\omega)\mathbf{E} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R}))\overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \omega\mathbf{D}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Az adott egyenletrendszerre alkalmazva a fenti képletet, azt kapjuk, hogy

$$\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & -\omega/4 \\ -2\omega/3 & 1-\omega \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \begin{bmatrix} \omega/4 \\ 2\omega/3 \end{bmatrix}.$$

Az iterációs mátrix sajátértékei: $1-\omega+\omega/\sqrt{6}$, $1-\omega-\omega/\sqrt{6}$, így a spektrálsugár akkor a legkisebb, ha $\omega = 1$, azaz a Jacobi-módszerről van szó. Ezzel az iteráció

$$\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ -2/3 & 0 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ 2/3 \end{bmatrix},$$

tehát az iterációs mátrix maximumnormája $2/3$ és $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = [1/4, 2/3]^T$. A

$$\frac{(2/3)^k}{1-(2/3)}\frac{2}{3} \leq 10^{-6}$$

feltételt kell garantálni, ami $k \geq 35.78$ esetén teljesül, azaz a 36. iterációtól már 10^{-6}-nál jobban megközelíti a sorozat maxiumnormában a megoldást.

6. Feladat. Végezzünk el egy lépést a gradiens módszerrel a nullvektorról indulva az előző feladat egyenletrendszeréből származtatott normálegyenletre!

Az együtthatómátrix transzponáltjával balról szorozva az egyenletet kapjuk a normálegyenletet

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Erre alkalmazva a gradiens módszert kapjuk, hogy

$$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 452/1445 \\ 791/2890 \end{bmatrix}.$$

7. Feladat. Adjuk meg Householder-tükrözések segítségével az alábbi mátrix QR-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Legyen $\mathbf{A}$ az adott mátrix. Az első oszlophoz tartozó $\overline{\mathbf{v}}$ vektor (+ jellel számolva) $\overline{\mathbf{v}} = [1, 0, 1]^T$. Így a $\mathbf{H}_1$ mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{H_1 A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A második oszlop 2. és 3. eleméhez, mint kételemű vektorhoz tartozó $\overline{\mathbf{v}}$ vektor $[1, -1]^T$ (+ jellel számolva), így

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Így

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\overline{\mathbf{v}}$ vektorok másfajta számolása esetén másfajta felbontást kapunk.

Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat, 2009/10. I. félév, B. csoport, MEGOLDÁSOK

Összesen maximum 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges. Az első kettő feladat 5, a többi 6 pontos.

1. Feladat. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix és $\mathbf{A}^{(k)}$ az $\mathbf{A}$ mátrix k-adrendű bal felső főminormátrixa ($A(1:k, 1:k)$). Igazoljuk, hogy $\|\mathbf{A}^{(k)}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2$!

Ugyanaz, mint az A. csoport második feladata.

2. Feladat. Az $a = 1000$ választás mellett $A = 1/(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})$ értéke 63.26136064087. Határozzuk meg mi is A értékét egy tizes számrendszerű, hatjegyű mantisszás lebegőpontos számokat használó számítógépen! Javasoljunk numerikus szempontból jobb számolást A-ra és végezzük el úgy is a számolásokat!

63.2911, a kiegyszerűsödés miatt. Szorozzunk a nevező konjugáltjával. Ebből kapjuk, hogy $A = \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$, amire 63.2614 adódik.

3. Feladat. Az alábbi mátrix egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ szimmetrikus mátrix LU-felbontását tartalmazza úgy, hogy a főátló ”alatti” rész az $\mathbf{L}$ mátrix megfelelő főátló alatti részét

tartalmazza, a többi elem pedig az $\mathbf{U}$ mátrix megfelelő eleme. Létezik-e az $\mathbf{A}$ mátrixnak Cholesky-felbontása? Ha igen, akkor adjuk meg a $\mathbf{G}$ mátrixot ($\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$)! Adjuk meg azt az $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ vektort, melyre $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [0, 0, 0, 1]^T$!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 7/2 \\ 3/2 & 1 & 4 & 3 \\ 3/2 & 7/3 & 3/4 & 1/12 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan az A. csoport feladatához, kapjuk, hogy

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 3/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/2 & 2 & 0 \\ 3\sqrt{2}/2 & 7\sqrt{6}/6 & 3/2 & \sqrt{3}/6 \end{bmatrix}$$

$\overline{\mathbf{x}} = [24, -19, -9, 12]^T$.

4. Feladat. Az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer $\mathbf{A}$ mátrixának és $\overline{\mathbf{b}}$ jobb oldali vektorának elemei mért mennyiségek, melyek relatív hibája 0.01%, adjunk felső becslést a megoldásvektor relatív hibájára maximumnormában!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0 & -1.7 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & -0.2 & 1.7 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0.26 & 0.18 & -0.16 & 0.04 \\ 0.18 & 0.87 & -0.14 & 0.24 \\ -0.16 & -0.14 & -0.49 & -0.10 \\ 0.04 & 0.24 & -0.10 & 0.65 \end{bmatrix}$$

Mivel $|\delta a_{ij}/a_{ij}| \le 0.01\% = 10^{-4}$, azaz $|\delta a_{ij}| \le 10^{-4}|a_{ij}|$, ezért $\|\delta\mathbf{A}\|_\infty/\|\mathbf{A}\|_\infty \le 10^{-4}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\|\delta\overline{\mathbf{b}}\|_\infty/\|\overline{\mathbf{b}}\|_\infty \le 10^{-4}$. A mátrixokról leolvasható, hogy $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$ és $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 1.42718$. Ebből a megoldás relatív hibájára levezetett képlet alapján kapjuk, hogy

$$\|\delta\overline{\mathbf{x}}\|_\infty/\|\overline{\mathbf{x}}\|_\infty \le \frac{6 \cdot 1.42718}{1 - 6 \cdot 1.42718 \cdot 10^{-4}}(10^{-4} + 10^{-4}) = 0.001714.$$

5. Feladat. Az alábbi egyenletrendszert szeretnénk megoldani a Jacobi-módszer relaxálásával. Hogyan válasszuk meg ω értékét, hogy a leggyorsabban konvergáljon az eljárás? Számítsuk ki, hogy a nulvektorról indulva a leggyorsabb módszerrel mennyit kellene iterálni, hogy a megoldást 10^{-6}-nál jobban megközelítsük maximumnormában! (A relaxált Jacobi-iteráció: $\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = ((1-\omega)\mathbf{E} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R}))\overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \omega\mathbf{D}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan az A. csoport feladatához, az iterációs mátrix sajátértékei: $1 - \omega \pm \omega/\sqrt{6}$, azaz a spektrálsugár $\omega = 1$ esetén a legkisebb. A megoldandó egyenlőtlenség:

$$\frac{(1/2)^k}{1 - (1/2)} \frac{2}{3} \le 10^{-6},$$

ami $k \ge 20.35$ esetén teljesül, azaz a 21. iterációtól már 10^{-6}-nál jobban megközelítjük a megoldást maximumnormában.

6. Feladat. Végezzünk el egy lépést a gradiens módszerrel a nullvektorról indulva az előző feladat egyenletrendszeréből származtatott normálegyenletre!

A normálegyenlet:

$$\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

és $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = [8/25, 6/25]^T$.

7. Feladat. Adjuk meg Householder-tükrözések segítségével az alábbi mátrix QR-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan eljárva, mint az A. csoportnál:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$