Numerikus módszerek I. zárthelyi pótdolgozat, 2009/10. I. félév

Összesen maximum 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges. Az első kettő feladat 5, a többi 6 pontos.

1. Feladat. Tekintsük az $x + dy = 1$, $dx + y = 0$ egyenletrendszert. Jól vagy rosszul kondícionált az x megoldás, ill. a megoldások $x + y$ összegének kiszámítása a d paraméter függvényében, ha $d \approx 1$? Adjuk meg mindkét esetben a relatív kondíciószám értékét a $d = 0.99$ esetre!

2. Feladat. A $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ harmonikus sor összege $+\infty$. Megkapnánk-e ezt az eredményt úgy, hogy egyre több tagot adunk össze a sorból a MATLAB segítségével? Mekkora összeget kapnánk egy tizes alapú, $F(2, -1, 1)$ lebegőpontos számokat használó számítógépen, ha a gép csak normálalakban lévő számokat tud ábrázolni?

3. Feladat. Adjuk meg az alábbi mátrix LU- és Cholesky-felbontásait!

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Feladat. Javasoljunk az alábbi egyenletrendszer iterációs megoldására egy alkalmas eljárást! Igazoljuk is a módszer konvergenciáját. Hajtsunk végre egy iterációs lépést vele az $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ kezdővektorról indulva! Mennyit kellene lépni a módszerrel, ha a megoldásvektort maximumnormában 10^{-6}-nál jobban meg szeretnénk közelíteni?

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 7 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}}^{(j)}\| \le \frac{\|\mathbf{B}\|^j}{1 - \|\mathbf{B}\|} \|\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(0)}\| \right)$$

5. Feladat. Az előző feladat egyenletrendszerének jobb oldali vektora mérési eredményeket tartalmaz. Mekkora az egyenletrendszer megoldásának relatív hibája maximumnormában, ha tudjuk, hogy a pontos értékek a szereplő értékek 0.1 sugarú környezetében vannak valahol. Az együtthatómátrix inverze

$$\begin{bmatrix} 0.0294 & 0.2176 & -0.0353 \\ 0.1765 & -0.0941 & -0.0118 \\ 0.0588 & 0.0353 & 0.1294 \end{bmatrix}. \qquad \left(\frac{\|\delta\overline{\mathbf{x}}\|}{\|\overline{\mathbf{x}}\|} \le \frac{\kappa(\mathbf{A})}{1 - \kappa(\mathbf{A})\|\delta\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|} \left(\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta\overline{\mathbf{b}}\|}{\|\overline{\mathbf{b}}\|} \right) \right)$$

6. Feladat. A konjugált gradiens módszer egy ciklusa: $\alpha_k := \overline{\mathbf{p}}_k^T \overline{\mathbf{r}}_{k-1} / (\overline{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{x}}_k := \overline{\mathbf{x}}_{k-1} + \alpha_k \overline{\mathbf{p}}_k$, $\overline{\mathbf{r}}_k := \overline{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}_k$, $\beta_k := \overline{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{r}}_k / (\overline{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{p}}_{k+1} := \overline{\mathbf{r}}_k - \beta_k \overline{\mathbf{p}}_k$. Igazoljuk, hogy az $\overline{\mathbf{r}}_k$ maradékvektor az $\overline{\mathbf{r}}_k = \overline{\mathbf{r}}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A} \overline{\mathbf{p}}_k$ módon is számolható! Miért előnyösebb ez az előállítás?

7. Feladat. Az $n \times n$-es Householder-tükrözési mátrixot egyértelműen meghatározza a tükrözési sík $\overline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ normálvektora. Ha osztjuk ezt a vektort az első elemével (első elemre normáljuk), akkor a vektor egy $n-1$ elemű vektor helyén eltárolható, hiszen az 1-es első elemet nem kell tárolni. Az alábbi mátrix egy $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását tartalmazza. A főátló és a felette lévő rész az $\mathbf{R}$ mátrix megfelelő elemeit tartalmazza, a főátló alatt az oszlopokban elhelyezkedő elemek a QR-felbontáshoz használt Householder tükrözési mátrixok első elemre normált $\overline{\mathbf{v}}$ vektorainak maradék elemei. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrixot!

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\frac{\overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}^T}{\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}}} \right)$$