Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2010/11. I.)

Az első két feladat 5, a többi 6 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral.

1. Feladat. Egy 10-es számrendszeren alapuló számítógép a $\sin x$, $\cos x$, x^2 függvények értékeit pontosan számolja, majd az eredmények ábrázolásánál hatjegyű mantisszára kerekít. Határozzuk meg ezen a számítógépen az $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ függvény értékét az $x = 0.7854$ helyen! Mekkora a számított eredmény relatív hibája (|közelítés−pontos|/|pontos|, pontos értéknek a számológépünk által (kerekítések nélkül) adott eredményt tekintjük)? Indokoljuk az eredményt! Javasoljunk jobb képletet az $f(x)$ érték kiszámítására!

2. Feladat. Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 1 & -0.1 \\ -0.2 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy $\mathbf{C}$ invertálható és adjunk felső becslést az inverz mátrix 1-es normájára az inverz mátrix kiszámítása nélkül.

3. Feladat. Ismert, hogy egy mátrix spektrálsugara becsülhető a mátrix tetszőleges indukált normájával. Igazoljuk ennek segítségével, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra $\|\mathbf{A}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty$ és hogy tetszőleges invertálható $\mathbf{A}$ mátrix esetén

$$\kappa_2(\mathbf{A}) \leq \sqrt{\kappa_1(\mathbf{A})\kappa_\infty(\mathbf{A})}\ !$$

4. Feladat. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását (a Gauss-eliminációs eljárás segítségével)! Oldjuk meg az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [1, 1, 1, 3]^T$ lineáris egyenletrendszert! Adjuk meg $\det(\mathbf{A})$ értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Feladat. A Jacobi- vagy a Gauss–Seidel iteráció konvergál gyorsabban az alábbi egyenletrendszerre?

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Adjunk felső becslést arra, hogy hány iterációs lépést kellene elvégeznünk a gyorsabb módszerrel a $[0, 0]^T$ kezdővektorral indulva, hogy a megoldást 10^{-6}-nál jobban megközelítse a sorozat 2-es normában!

6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix kondíciószámát 1-es, 2-es és maximumnormában! Tekintsük az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert, ahol $\overline{\mathbf{b}}$ egy adott pozitív vektor. Adjunk felső becslést maximumnormában a $\overline{\mathbf{b}}$ vektor maximumnormájának segítségével arra, hogy ezen egyenletrendszer megoldásától mennyire térhet el azon egyenletrendszer megoldása, melyben a $\overline{\mathbf{b}}$ vektor minden elemét 1%-kal megnöveljük ($\mathbf{A}$ változatlan marad)!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

7. Feladat. A konjugált gradiens módszer egy ciklusa: $\alpha_k := \overline{\mathbf{p}}_k^T \overline{\mathbf{r}}_{k-1} / (\overline{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{x}}_k := \overline{\mathbf{x}}_{k-1} + \alpha_k \overline{\mathbf{p}}_k$, $\overline{\mathbf{r}}_k := \overline{\mathbf{r}}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A} \overline{\mathbf{p}}_k$, $\beta_k := \overline{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{r}}_k / (\overline{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{p}}_{k+1} := \overline{\mathbf{r}}_k - \beta_k \overline{\mathbf{p}}_k$. Oldjuk meg a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert a konjugált gradiens módszer segítségével!