Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat, Megoldások (2010/11. I.)

1. Feladat. Egy 10-es számrendszeren alapuló számítógép a $\sin x$, $\cos x$, x^2 függvények értékeit pontosan számolja, majd az eredmények ábrázolásánál hatjegyű mantisszára kerekít. Határozzuk meg ezen a számítógépen az $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ függvény értékét az $x = 0.7854$ helyen! Mekkora a számított eredmény relatív hibája (|közelítés−pontos|/|pontos|, pontos értéknek a számológépünk által (kerekítések nélkül) adott eredményt tekintjük)? Indokoljuk az eredményt! Javasoljunk jobb képletet az $f(x)$ érték kiszámítására!

Megoldás: $\cos(0.7854)$ értéke 6-jegyű mantisszára kerekítve: 7.07105×10^{-1}. Ennek négyzete 4.99997×10^{-1}. Hasonlóan $\sin^2(0.7854) \approx 5.00002 \times 10^{-1}$. Így $f(0.7854) \approx -5 \times 10^{-6}$. A pontos $f(0.7854)$ érték -3.67321×10^{-6}. A relatív hiba tehát 0.3612. Ez nagy relatív hiba. Oka az, hogy két közeli számot vontunk ki egymásból a számolás során. Ez elkerülhető az $f(x) = \cos(2x)$ formula alkalmazásával. Ezzel, szintén hatjegyű mantisszára kerekítve -3.67321×10^{-6} adódik a számolás során. Ennek sokkal kisebb a relatív hibája.

2. Feladat. Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 1 & -0.1 \\ -0.2 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy $\mathbf{C}$ invertálható és adjunk felső becslést az inverz mátrix 1-es normájára az inverz mátrix kiszámítása nélkül.

Megoldás I: A $\mathbf{C}$ mátrix egy M-mátrix, hiszen a főátlón kívül nincs pozitív eleme és a $\overline{\mathbf{g}} = [1, 1, 1]^T$ vektorral beszorozva a $[0.7, 0.8, 0.7]^T$ pozitív vektor adódik. Az M-mátrixok invertálhatók, továbbá a szimmetria miatt az 1-es norma megegyezik a maximumnormával. Így az M-mátrixok inverzének becsléséről szóló tétel alapján:

$$\|\mathbf{C}^{-1}\|_1 = \|\mathbf{C}^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{0.7} = 1.43.$$

Megoldás II: A $\mathbf{C}$ mátrix tulajdonképpen az egységmátrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal való perturbációja. A tanult tétel alapján, mivel $\|\mathbf{R}\|_1 = 0.3 < 1$, azért $\mathbf{E} + \mathbf{R}$ invertálható és

$$\|\mathbf{C}^{-1}\|_1 \le \frac{1}{1 - 0.3} = 1.43.$$

3. Feladat. Ismert, hogy egy mátrix spektrálsugara becsülhető a mátrix tetszőleges indukált normájával. Igazoljuk ennek segítségével, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra $\|\mathbf{A}\|_2^2 \le \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty$ és hogy tetszőleges invertálható $\mathbf{A}$ mátrix esetén

$$\kappa_2(\mathbf{A}) \le \sqrt{\kappa_1(\mathbf{A})\kappa_\infty(\mathbf{A})}\ !$$

Megoldás:

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 = \varrho(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}^T\mathbf{A}\|_\infty \le \|\mathbf{A}^T\|_\infty \|\mathbf{A}\|_\infty \le \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty,$$

ahol felhasználtuk, hogy egy mátrix maximumnormája megegyezik a transzponáltjának 1-es normájával. A második állítás az első állítás segítségével

$$\kappa_2^2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2^2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2^2 \le \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \kappa_1(\mathbf{A})\kappa_\infty(\mathbf{A})$$

módon adódik.

4. Feladat. Adjunk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását (a Gauss-eliminációs eljárás segítségével)! Oldjuk meg az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [1,1,1,3]^T$ lineáris egyenletrendszert! Adjuk meg $\det(\mathbf{A})$ értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszert az $\mathbf{LU}\overline{\mathbf{x}} = [1,1,1,3]^T$ alakból kiindulva először megoldjuk $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{U}\overline{\mathbf{x}}$-re egyszerű visszahelyettesítéssel: $y_1 = 1$ egyszerre adódik az első egyenletből, a másodikból $2y_1 + y_2 = 1$, azaz $2 + y_2 = 1$, melyből $y_2 = -1$, stb. Így kapjuk, hogy $\overline{\mathbf{y}} = [1,-1,0,4]^T$. Az $\mathbf{U}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$ egyenlet megoldása hasonlóan nyerhető: $\overline{\mathbf{x}} = [-4,7,-2,2]^T$. A determináns $\mathbf{U}$ determinánsa, azaz a főátlóbeli elemeinek szorzata, tehát -2.

5. Feladat. A Jacobi- vagy a Gauss–Seidel iteráció konvergál gyorsabban az alábbi egyenletrendszerre?

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Adjunk felső becslést arra, hogy hány iterációs lépést kellene elvégeznünk a gyorsabb módszerrel a $[0,0]^T$ kezdővektorral indulva, hogy a megoldást 10^{-6}-nál jobban megközelítse a sorozat 2-es normában!

Megoldás:

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

így $\varrho(\mathbf{B}_J) = 1/2$ és $\varrho(\mathbf{B}_J) = 1/4$. A Gauss-Seidel konvergál gyorsabban. Az iteráció

$$\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Így $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = [1, 3/2]^T$ és $\|\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}^{(0)}\| = \sqrt{13}/2$. Továbbá $\varrho(\mathbf{B}_{GS}^T \mathbf{B}_{GS}) = 5/16$, azaz $\|\mathbf{B}_{GS}\|_2 = \sqrt{5}/4$ és a hibabecslő formulából

$$\|\overline{\mathbf{x}}^{(k)} - \overline{\mathbf{x}}^\star\| \le \frac{(\sqrt{5}/4)^k}{1 - (\sqrt{5}/4)} \frac{\sqrt{13}}{2} \le 10^{-6},$$

azaz $k \ge 26.17$ kell legyen.

6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix kondíciószámát 1-es, 2-es és maximumnormában! Tekintsük az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert, ahol $\overline{\mathbf{b}}$ egy adott pozitív vektor. Adjunk felső becslést maximumnormában a $\overline{\mathbf{b}}$ vektor maximumnormájának segítségével arra, hogy ezen egyenletrendszer megoldásától mennyire térhet el azon egyenletrendszer megoldása, melyben a $\overline{\mathbf{b}}$ vektor minden elemét 1%-kal megnöveljük ($\mathbf{A}$ változatlan marad)!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Megoldás:
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix},$$
így $\kappa_1(\mathbf{A}) = \kappa_\infty(\mathbf{A}) = 1.5 \cdot 18 = 27$, és $\kappa_2(\mathbf{A}) = 1.2676/0.0657 = 19.3$ ($\mathbf{A}$ legnagyobb és legkisebb sajátértékének hányadosa).

Legyen $\overline{\mathbf{x}}^\star$ az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer megoldása. Ekkor $\overline{\mathbf{b}}$-t 1%-kal megnövelve az $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}}^\star + \delta\overline{\mathbf{x}}) = 1.01\overline{\mathbf{b}}$ egyenlőséghez jutunk, ahol $\delta\overline{\mathbf{x}}$ becsülendő maximumnormában. A fenti egyenlőségből $\mathbf{A}\delta\overline{\mathbf{x}} = 0.01\overline{\mathbf{b}}$ adódik, azaz
$$\|\delta\overline{\mathbf{x}}\|_\infty = 0.01\|\mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{b}}\|_\infty \leq 0.01\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\|\overline{\mathbf{b}}\|_\infty = 0.01 \cdot 18\|\overline{\mathbf{b}}\|_\infty = 0.18\|\overline{\mathbf{b}}\|_\infty.$$
Ezzel a kívánt becslést kaptuk.

7. Feladat. A konjugált gradiens módszer egy ciklusa: $\alpha_k := \overline{\mathbf{p}}_k^T\overline{\mathbf{r}}_{k-1}/(\overline{\mathbf{p}}_k^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{x}}_k := \overline{\mathbf{x}}_{k-1} + \alpha_k\overline{\mathbf{p}}_k$, $\overline{\mathbf{r}}_k := \overline{\mathbf{r}}_{k-1} - \alpha_k\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_k$, $\beta_k := \overline{\mathbf{p}}_k^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{r}}_k/(\overline{\mathbf{p}}_k^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_k)$, $\overline{\mathbf{p}}_{k+1} := \overline{\mathbf{r}}_k - \beta_k\overline{\mathbf{p}}_k$. Oldjuk meg a
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
egyenletrendszert a konjugált gradiens módszer segítségével!

Megoldás: A mátrix szimmetrikus, pozitív definit, így alkalmazható rá a módszer. $\overline{\mathbf{x}} = [0,0]^T$, $\overline{\mathbf{r}} = [1,0]^T$, $\overline{\mathbf{p}} = [1,0]^T$, $\alpha = 1/3$, $\overline{\mathbf{x}} = [1/3,0]^T$, $\overline{\mathbf{r}} = [0,-1/3]^T$, $\beta = -1/9$, $\overline{\mathbf{p}} = [1/9,-1/3]^T$, $\alpha = 3/11$, $\overline{\mathbf{x}} = [4/11,-1/11]^T$, ami már az egyenletrendszer megoldását adja.