Numerikus módszerek I. zárthelyi pót/javítódolgozat, 2010/11. I. félév

Összesen maximum 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges. Az első kettő feladat 5, a többi 6 pontos.

1. Feladat. Az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletet szeretnénk megoldani az $x_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2$ megoldóképlettel. Milyen végeredményt adna a MATLAB az $a = -500000000$ és $b = 1$ paraméterekekkel? Becsüljük meg, hogy melyik eredmény elfogadható és melyik nem. Hogyan számolhatnánk ki MATLAB-ban a zérushelyeket pontosabban?

2. Feladat. Igaz-e az az állítás, hogy egy invertálható valós mátrix pontosan akkor ortogonális, ha 2-es normabeli kondíciószáma 1? Válaszunkat részletesen indokoljuk!

3. Feladat. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy invertálható mátrix és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy szinguláris mátrix. Igazoljuk, hogy

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \frac{1}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|}$$

bármilyen $\|.\|$ indukált normában! Adjunk alsó becslést a fenti becslés segítségével az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix maximumnormabeli kondíciószámára!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix}$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Gauss-módszerrel részleges főelemkiválasztást alkalmazva egy olyan számítógépen, amely a lebegőpontos ábrázolás során tizes számrendszerben hatjegyű mantisszát használ és a karakterisztikára nincs megkötés.

$$\begin{bmatrix} 0.00001 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.00001 \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

5. Feladat. Legyen $\mathbf{A} = \text{tridiag}\,[-1, 2, -1] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, azaz $\mathbf{A}$ egy olyan négyzetes mátrix, melynek főátlójában 2-esek, a sub- és szuperdiagonálisban -1-esek állnak. A többi elem nulla. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszert Jacobi-módszerrel szeretnénk megoldani. Határozzuk meg a Jacobi-módszer iterációs mátrixának spektrálsugarát, ha tudjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei

$$\lambda_k = 2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right), \; k = 1, \ldots, n \;!$$

Mit mondhatunk a módszer konvergenciájáról?

6. Feladat. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer helyett ($\mathbf{A}$ invertálható mátrix) az $(1 + c)\mathbf{A}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert oldjuk meg, ahol c valamilyen valós, -1-től különböző paraméter! Számítsuk ki tetszőleges indukált normában a második egyenlet megoldásának az első egyenlet megoldásához viszonyított relatív hibáját a c paraméter függvényében!

7. Feladat. Oldjuk meg a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert a gradiens módszer segítségével! Elegendő az $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [0, 0]^T$ vektorral indulva 2 lépést elvégezni az iterációval.