Numerikus módszerek I. zárthelyi pót/javítódolgozat, Megoldások, 2010/11. I. félév

1. Feladat. Az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletet szeretnénk megoldani az $x_{1,2} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2$ megoldóképlettel. Milyen végeredményt adna a MATLAB az $a = -500000000$ és $b = 1$ paraméterekekkel? Becsüljük meg, hogy melyik eredmény elfogadható és melyik nem. Hogyan számolhatnánk ki MATLAB-ban a zérushelyeket pontosabban?

A gyökjel alatt az $a^2 - 4b = 2.5 \times 10^{17} - 4$ értéket kellene kiszámítani, amire a MATLAB 2.5×10^{17}-ent fog adni ($\varepsilon_g \approx 2 \times 10^{-16}$). Ezért a két gyök $x_1 = 5 \times 10^8$ és $x_2 = 0$. Nyilvánvaló, hogy x_1 relatív hibája kicsi, míg az x_2 gyöké nagy. Jobb eredményt érhetünk el, ha észrevesszük, hogy a két gyök szorzata (Viete-formula) 1, így x_2 jobban számolható úgy, hogy x_1 reciprokát vesszük. Így $x_2 = 2 \times 10^{-9}$ adódik. (Hasonlóan jó megoldás a számláló gyöktelenítése is a konjugálttal való szorzással és osztással.)

2. Feladat. Igaz-e az az állítás, hogy egy invertálható valós mátrix pontosan akkor ortogonális, ha 2-es normabeli kondíciószáma 1? Válaszunkat részletesen indokoljuk!

Mivel előadáson szerepelt, hogy ortogonális mátrixok 2-es normája 1, így a kondíciószámuk is nyilván 1 2-es normában. A másik irány pedig nem igaz. Pl. az $\mathbf{A} = 2\mathbf{E}$ mátrixra $\kappa_2(\mathbf{A}) = 1$, de nem ortogonális, hiszen $\mathbf{A}^{-1} = (1/2)\mathbf{E} \neq \mathbf{A}^T$.

3. Feladat. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy invertálható mátrix és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy szinguláris mátrix. Igazoljuk, hogy

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \frac{1}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|}$$

bármilyen $\|.\|$ indukált normában! Adjunk alsó becslést a fenti becslés segítségével az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix maximumnormabeli kondíciószámára!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix}$$

Mivel $\mathbf{B}$ szinguláris, így van olyan $\overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, melyre $\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Erre az $\overline{\mathbf{x}}$ vektorra:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}},$$

azaz

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|\|\overline{\mathbf{x}}\| \geq \|\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\overline{\mathbf{x}}\| = \|\overline{\mathbf{x}}\|,$$

majd $\|\overline{\mathbf{x}}\|$-szel osztva és átrendezve kapjuk a bizonyítandó állítást. Válasszuk $\mathbf{B}$-nek a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Ekkor $\|\mathbf{A}\|_\infty = 2.1$ és az igazolt állítás miatt $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \geq 1/0.1 = 10$, így $\kappa_\infty(\mathbf{A}) \geq 21$.

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Gauss-módszerrel részleges főelemkiválasztást alkalmazva egy olyan számítógépen, amely a lebegőpontos ábrázolás során tizes számrendszerben hatjegyű mantisszát használ és a karakterisztikára nincs megkötés.

$$\begin{bmatrix} 0.00001 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.00001 \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

A feladat szerint tehát minden számot $x.xxxxx \cdot 10^k$ alakra kerekítünk, ahol a tizedespont előtti x nullától különböző. A kiindulási egyenletrendszer tehát

$$\begin{array}{ccc|c} 0.00001 & 2 & 3 & 5.00001 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 10 & 3 & 4 & 17 \end{array}$$

Először kicseréljük az első és harmadik sorokat a részleges főelemkiválasztás miatt:

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & 3 & 4 & 17 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0.00001 & 2 & 3 & 5.00001 \end{array}\ .$$

Az első oszlopot elimináljuk

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & 1.7 & 2.6 & 4.3 \\ 0 & 2 & 3 & 4.99999 \end{array}\ .$$

Itt pl. $2-3\cdot 10^{-6} = 1.99999700000$, kerekítve 2, de pl. $5.00001-17\cdot 10^{-6} = 4.99999300000$, kerekítve 4.99999. Most a második és harmadik sorokat cseréljük:

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & 2 & 3 & 4.99999 \\ 0 & 1.7 & 2.6 & 4.3 \end{array}\ ,$$

majd eliminálunk

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & 2 & 3 & 4.99999 \\ 0 & 0 & 0.05 & 5.001 \times 10^{-2} \end{array}\ .$$

Ezután visszahelyettesítéssel $x = 1.00001$, $y = 0.999695$ és $z = 1.0002$ adódik.

5. Feladat. Legyen $\mathbf{A} = \operatorname{tridiag}[-1, 2, -1] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, azaz $\mathbf{A}$ egy olyan négyzetes mátrix, melynek főátlójában 2-esek, a sub- és szuperdiagonálisban -1-esek állnak. A többi elem nulla. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszert Jacobi-módszerrel szeretnénk megoldani. Határozzuk meg a Jacobi-módszer iterációs mátrixának spektrálsugarát, ha tudjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei

$$\lambda_k = 2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k = 1, \ldots, n\ !$$

Mit mondhatunk a módszer konvergenciájáról?

A Jacobi-módszer iterációs mátrixa $\mathbf{B}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R})$, amely most a $\mathbf{B}_J = (2\mathbf{E})^{-1}(-\mathbf{A}+2\mathbf{E})$ alakban írható, melyet átalakítva $\mathbf{B}_J = (1/2)(-\mathbf{A}+2\mathbf{E})$ adódik. Ennek sajátértékei $(1/2)(2-\lambda_k) = 1-\lambda_k/2 = \cos(k\pi/(n+1))$ alakúak. A spektrálsugár $k = 1$-re adódik $\varrho(\mathbf{B}_J) = \cos(\pi/(n+1))$. Mivel ez 1-nél kisebb, így a módszer mindig konvergens lesz. Nagy n-ekre lassú a konvergencia. (A konvergencia abból is következik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus pozitív definit (minden sajátérték pozitív).)

6. Feladat. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer helyett ($\mathbf{A}$ invertálható mátrix) az $(1+c)\mathbf{A}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert oldjuk meg, ahol c valamilyen valós, -1-től különböző paraméter! Számítsuk ki tetszőleges indukált normában a második egyenlet megoldásának az első egyenlet megoldásához viszonyított relatív hibáját a c paraméter függvényében!

$$\frac{\|\overline{\mathbf{v}}-\overline{\mathbf{u}}\|}{\|\overline{\mathbf{v}}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{b}}-\mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{b}}/(1+c)\|}{\|\overline{\mathbf{v}}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{b}}(1-1/(1+c)\|}{\|\overline{\mathbf{v}}\|}$$
$$= \frac{\|\overline{\mathbf{v}}(c/(1+c))\|}{\|\overline{\mathbf{v}}\|} = \frac{|c/(1+c)|\|\overline{\mathbf{v}}\|}{\|\overline{\mathbf{v}}\|} = \left|\frac{c}{1+c}\right|$$

7. Feladat. Oldjuk meg a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert a gradiens módszer segítségével! Elegendő az $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [0,0]^T$ vektorral indulva 2 lépést elvégezni az iterációval.

$\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [0,0]^T$, $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = [1/3,0]^T$, $\overline{\mathbf{x}}^{(2)} = [1/3,-1/12]^T$.